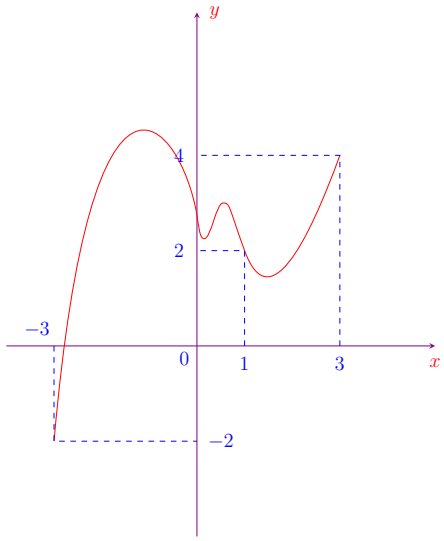
CHINH PHỤC TOÁN THPT

Thầy NGUYỄN BỈNH KHÔI

ĐT: 0909 461 641

TÀI LIỆU HỌC TẬP



TOÁN 12
HỌC KÌ I

GIẢI TÍCH

Blog của Fanpage
Thầy Khôi 10-11-12 và LTĐH

Phone
0909 461 641

Contact
nguyenbinhkhoi160788@gmail

LƯU HÀNH NỘI BỘ

MỤC LỤC

PHẦN I GIẢI TÍCH

Chương 1. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ 2

Bài 1. SỰ ĐỒNG BIẾN NGHỊCH BIẾN CỦA HÀM SỐ 2

Ⓐ LÝ THUYẾT CẦN NHỚ ... 2

Ⓑ CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP ... 3

- Dạng 1. Tìm khoảng đơn điệu của một hàm số cho trước ... 3
- Dạng 2. Tìm khoảng đơn điệu của hàm số dựa vào bảng biến thiên ... 5
- Dạng 3. Tìm khoảng đơn điệu của hàm số dựa vào đồ thị hàm số ... 6
- Dạng 4. Tìm m để hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đơn điệu trên $\mathbb{R}$ ... 8
- Dạng 5. Tìm m để hàm "nhất biến" đơn điệu trên từng khoảng xác định ... 9
- Dạng 6. Biện luận đơn điệu của hàm đa thức trên khoảng, đoạn cho trước ... 9
- Dạng 7. Biện luận đơn điệu của hàm "nhất biến" trên khoảng, đoạn cho trước ... 10
- Dạng 8. Một số bài toán liên quan đến hàm hợp ... 11

Ⓒ BÀI TẬP TỰ LUYỆN ... 13

Bài 2. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ 19

Ⓐ LÝ THUYẾT CẦN NHỚ ... 19

Ⓑ CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP ... 19

- Dạng 1. Sử dụng quy tắc 1 để tìm cực trị cực hàm số cho bởi công thức ... 19
- Dạng 2. Xác định cực trị khi biết bảng biến thiên hoặc đồ thị ... 21
- Dạng 3. Sử dụng quy tắc 2 để tìm cực trị cực hàm số cho bởi công thức ... 23
- Dạng 4. Tìm m để hàm số đạt cực trị tại điểm x_0 cho trước ... 24
- Dạng 5. Biện luận cực trị hàm bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ... 25
- Dạng 6. Biện luận cực trị hàm trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ ... 26
- Dạng 7. Tìm m để hàm số đồ thị bất kì có cực trị ... 27

Ⓒ BÀI TẬP TỰ LUYỆN ... 29

Bài 3. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT - NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ 34

Ⓐ LÝ THUYẾT CẦN NHỚ ... 34

Ⓑ CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP ... 34

- Dạng 1. Tìm max – min của hàm số cho trước trên đoạn $[a;b]$ ... 34
- Dạng 2. Tìm max – min trên một khoảng $(a;b)$ ... 36
- Dạng 3. Một số bài toán tìm max – min chứa tham số ... 37
- Dạng 4. Một số bài toán vận dụng ... 38

Ⓒ BÀI TẬP TỰ LUYỆN ... 40

Bài 4. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ 45

Ⓐ LÝ THUYẾT CẦN NHỚ ... 45

Ⓑ CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP ... 46

- Dạng 1. Cho hàm số $y = f(x)$, tìm TCĐ và TCN của đồ thị tương ứng ... 46
- Dạng 2. Xác định TCN và TCĐ khi biết bảng biến thiên hàm số $y = f(x)$ ... 48

Dạng 3. Một số bài toán biện luận theo tham số m 50

Ⓒ BÀI TẬP TỰ LUYỆN 53

Bài 5. ĐỒ THỊ CÁC HÀM SỐ THƯỜNG GẶP **59**

Ⓐ LÝ THUYẾT CẦN NHỚ 59

Ⓑ CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP 60

Dạng 1. Nhận dạng đồ thị hàm bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 60

Dạng 2. Nhận dạng đồ thị hàm bậc bốn trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ 63

Dạng 3. Nhận dạng đồ thị hàm nhất biến $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ 65

Ⓒ BÀI TẬP TỰ LUYỆN 68

Bài 6. ỨNG DỤNG ĐỒ THỊ ĐỂ BIỆN LUẬN NGHIỆM PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH. **75**

Ⓐ LÝ THUYẾT CẦN NHỚ 75

Ⓑ CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP 76

Dạng 1. Giải, biện luận nghiệm phương trình bằng phương pháp đồ thị 76

Dạng 2. Giải, biện luận nghiệm bất phương trình bằng phương pháp đồ thị 80

Dạng 3. Một số bài toán liên quan đến hàm hợp 81

Ⓒ BÀI TẬP TỰ LUYỆN 83

Bài 7. SỰ TƯƠNG GIAO CỦA HAI ĐỒ THỊ **90**

Ⓐ LÝ THUYẾT CẦN NHỚ 90

Ⓑ CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ 90

Dạng 1. Xác định (biện luận) giao điểm của đường thẳng và đồ thị của hàm số bậc ba 90

Dạng 2. Xác định (biện luận) giao điểm của đường thẳng và đồ thị của hàm số bậc bốn trùng phương 93

Dạng 3. Xác định (biện luận) giao của đường thẳng và đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ 94

Ⓒ BÀI TẬP TỰ LUYỆN 97

Bài 8. TIẾP TUYẾN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ **102**

Ⓐ LÝ THUYẾT CẦN NHỚ 102

Ⓑ CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ 102

Dạng 1. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $(x_0; y_0)$ 102

Dạng 2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ khi biết hệ số góc 104

Dạng 3. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$, biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(x_A; y_A)$ 105

Dạng 4. Bài tập tổng hợp 106

Ⓒ BÀI TẬP TỰ LUYỆN 108

Chương 2. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT **113**

Bài 1. LŨY THỪA **113**

Ⓐ LÝ THUYẾT CẦN NHỚ 113

Ⓑ CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP 114

Dạng 1. Tính giá trị biểu thức 114

Dạng 2. Rút gọn biểu thức liên quan đến lũy thừa 115
Dạng 3. So sánh hai lũy thừa 116
Ⓒ BÀI TẬP TỰ LUYỆN 117
Bài 2. HÀM SỐ LŨY THỪA **122**
Ⓐ LÝ THUYẾT CẦN NHỚ 122
Ⓑ CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP 122
Dạng 1. Tìm tập xác định của hàm số lũy thừa 122
Dạng 2. Tìm đạo hàm của hàm số lũy thừa 124
Dạng 3. Đồ thị của hàm số lũy thừa 125
Ⓒ BÀI TẬP TỰ LUYỆN 127
Bài 3. LÔGARIT **131**
Ⓐ LÝ THUYẾT CẦN NHỚ 131
Ⓑ CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN 132
Dạng 1. So sánh hai lôgarit 132
Dạng 2. Công thức, tính toán lôgarit 132
Dạng 3. Phân tích biểu thức lôgarit theo các lo-ga-rit cho trước 134
Dạng 4. Xác định một số nguyên dương có bao nhiêu chữ số 135
Dạng 5. Tổng hợp biến đổi lôgarit nâng cao 135
Ⓒ BÀI TẬP TỰ LUYỆN 138
Bài 4. HÀM SỐ MŨ, HÀM SỐ LÔGARIT **142**
Ⓐ LÝ THUYẾT CẦN NHỚ 142
Ⓑ CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN 143
Dạng 1. Tìm tập xác định 143
Dạng 2. Tính đạo hàm 145
Dạng 3. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất 147
Dạng 4. Các bài toán liên quan đến đồ thị 148
Ⓒ BÀI TẬP TỰ LUYỆN 151
Bài 5. PHƯƠNG TRÌNH MŨ, PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT CƠ BẢN **156**
Ⓐ LÝ THUYẾT CẦN NHỚ 156
Ⓑ CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP 156
Dạng 1. Giải phương trình mũ cơ bản, phương pháp đưa về cùng cơ số 157
Dạng 2. Giải phương trình mũ bằng phương pháp đặt ẩn phụ 158
Dạng 3. Giải phương trình mũ bằng phương pháp lôgarít hóa 159
Dạng 4. Giải phương trình lôgarit cơ bản, phương pháp đưa về cùng cơ số 160
Dạng 5. Giải phương trình lôgarít bằng phương pháp đặt ẩn phụ 161
Dạng 6. Giải phương trình mũ và lôgarít bằng phương pháp hàm số 162
Ⓒ BÀI TẬP TỰ LUYỆN 164
Bài 6. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ, BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT CƠ BẢN **168**
Ⓐ LÝ THUYẾT CẦN NHỚ 168
Ⓑ CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP 169
Dạng 1. Giải bất phương trình mũ cơ bản, phương pháp đưa về cùng cơ số 169
Dạng 2. Giải bất phương trình mũ bằng phương pháp đặt ẩn phụ 170

Dạng 3. Giải bất phương trình logarit cơ bản, phương pháp đưa về cùng cơ số 172
Dạng 4. Giải bất phương trình lôgarit bằng phương pháp đặt ẩn phụ 173
Dạng 5. Bài toán lãi kép 174
Ⓒ BÀI TẬP TỰ LUYỆN 176
Bài 7. PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ, LOGARIT CÓ CHỨA THAM SỐ 180
Ⓐ CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP 180
Dạng 1. Phương trình có nghiệm đẹp – Định lý Viét 180
Dạng 2. Phương trình không có nghiệm đẹp – Phương pháp hàm số 181
Dạng 3. Bất phương trình – Phương pháp hàm số 182
Ⓑ BÀI TẬP TỰ LUYỆN 184
Bài 8. ĐỀ TỔNG ÔN 189
Ⓐ ĐỀ SỐ 1 189
Ⓑ ĐỀ SỐ 2 195
Chương 3. NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN 201
Bài 1. TÍNH NGUYÊN HÀM – SỬ DỤNG ĐỊNH NGHĨA, BẢNG CÔNG THỨC 201
Ⓐ CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP 201
Dạng 1. Áp dụng bảng công thức nguyên hàm 201
Dạng 2. Tách hàm dạng tích thành tổng 203
Dạng 3. Tách hàm dạng phân thức thành tổng 204
Ⓑ BÀI TẬP TỰ LUYỆN 206
Bài 2. TÍNH NGUYÊN HÀM – SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ 210
Ⓐ CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP 210
Dạng 1. Đổi biến dạng hàm lũy thừa 210
Dạng 2. Đổi biến dạng hàm phân thức 211
Dạng 3. Đổi biến dạng hàm vô tỉ 212
Dạng 4. Đổi biến dạng hàm lượng giác 212
Dạng 5. Đổi biến dạng hàm mũ, hàm lô-ga-rit 213
Ⓑ BÀI TẬP TỰ LUYỆN 215
Bài 3. TÍNH NGUYÊN HÀM - SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN HÀM TỪNG PHẦN 219
Ⓐ CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP 219
Dạng 1. Nguyên hàm từng phần với "u = đa thức" 219
Dạng 2. Nguyên hàm từng phần với "u = lôgarit" 220
Dạng 3. Nguyên hàm kết hợp đổi biến số và từng phần 221
Dạng 4. Nguyên hàm từng phần dạng "lặp" 221
Dạng 5. Nguyên hàm từng phần dạng "hàm ẩn" 222
Ⓑ BÀI TẬP TỰ LUYỆN 223
Bài 4. TÍNH TÍCH PHÂN - SỬ DỤNG ĐỊNH NGHĨA, TÍNH CHẤT 228
Ⓐ CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP 228
Dạng 1. Sử dụng định nghĩa, tính chất tích phân 228

Dạng 2. Tách hàm dạng tích thành tổng các hàm cơ bản 230
Dạng 3. Tách hàm dạng phân thức thành tổng các hàm cơ bản 231
Ⓑ BÀI TẬP TỰ LUYỆN 233
Bài 5. TÍNH TÍCH PHÂN – SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ 238
Ⓐ CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP 238
Dạng 1. Đổi biến loại $t = u(x)$ 238
Dạng 2. Đổi biến loại $x = \varphi(t)$ (Lượng giác hóa) 240
Ⓑ BÀI TẬP TỰ LUYỆN 242
Bài 6. TÍNH TÍCH PHÂN – SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN 248
Ⓐ CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP 248
Dạng 1. Tích phân từng phần với "u = đa thức" 248
Dạng 2. Tích phân từng phần với "u = logarit" 249
Ⓑ BÀI TẬP TỰ LUYỆN 250
Bài 7. TÍCH PHÂN HÀM ẨN 255
Ⓐ CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP 255
Dạng 1. Sử dụng tính chất tính phân không phụ thuộc biến 255
Dạng 2. Tìm hàm $f(x)$ bằng phương pháp đổi biến số 256
Dạng 3. Tìm hàm $f(x)$ bằng phương pháp đưa về "đạo hàm đúng" 256
Dạng 4. Phương pháp tích phân từng phần 257
Dạng 5. Phương pháp ghép bình phương 258
Ⓑ BÀI TẬP TỰ LUYỆN 260
Bài 8. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN – TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG 268
Ⓐ CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP 268
Dạng 1. Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $\mathbf{y = f(x)}$ và $\mathbf{y = g(x)}$ 268
Dạng 2. Hình phẳng giới hạn bởi nhiều hơn hai đồ thị hàm số 272
Dạng 3. Toạ độ hoá một số "mô hình" hình phẳng thực tế 272
Ⓑ BÀI TẬP TỰ LUYỆN 275
Bài 9. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN – TÍNH THỂ TÍCH VẬT THỂ, KHỐI TRÒN XOAY 282
Ⓐ CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP 282
Dạng 1. Tính thể tích vật thể khi biết diện tích mặt cắt vuông góc với Ox 282
Dạng 2. Tính thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng quay quanh trục Ox 282
Dạng 3. Tọa độ hóa một số bài toán thực tế 285
Ⓑ BÀI TẬP TỰ LUYỆN 286
Bài 10. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN – MỘT SỐ BÀI TOÁN CHUYỂN ĐỘNG 291
Ⓐ CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP 291
Dạng 1. Cho hàm vận tốc, tìm quãng đường di chuyển của vật 291
Dạng 2. Cho đồ thị hàm vận tốc, tìm quãng đường di chuyển của vật 291
Dạng 3. Cho hàm gia tốc, tìm quãng đường di chuyển của vật 292
Ⓑ BÀI TẬP TỰ LUYỆN 293

Bài 11. ĐỀ TỔNG ÔN 296
Ⓐ ĐỀ SỐ 1 ... 296
Ⓑ ĐỀ SỐ 2 ... 301
Chương 4. SỐ PHỨC 306
Bài 1. NHẬP MÔN SỐ PHỨC 306
Ⓐ TÓM TẮT LÝ THUYẾT ... 306
Ⓑ CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP ... 307
Dạng 1. Xác định số phức bằng các phép toán ... 308
Dạng 2. Số phức bằng nhau ... 309
Dạng 3. Điểm biểu diễn số phức ... 310
Dạng 4. Lũy thừa với đơn vị ảo ... 311
Ⓒ BÀI TẬP TỰ LUYỆN ... 312
Bài 2. PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH 318
Ⓐ CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP ... 318
Dạng 1. Phương trình bậc nhất ... 318
Dạng 2. Phương trình bậc hai với hệ số thực ... 319
Dạng 3. Xác định số phức bằng cách giải hệ phương trình ... 320
Ⓑ BÀI TẬP TỰ LUYỆN ... 323
Bài 3. TẬP HỢP ĐIỂM BIỂU DIỄN SỐ PHỨC 328
Ⓐ CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP ... 328
Dạng 1. Tọa độ điểm biểu diễn của số phức ... 328
Dạng 2. Tập hợp điểm biểu diễn số phức là đường thẳng ... 329
Dạng 3. Tập hợp điểm biểu diễn số phức là đường tròn ... 330
Dạng 4. Tập hợp điểm biểu diễn số phức là đường Elip ... 332
Dạng 5. Một số mô hình khác ... 333
Ⓑ BÀI TẬP TỰ LUYỆN ... 335
Bài 4. MAX, MIN CỦA MÔ-ĐUN SỐ PHỨC 341
Ⓐ CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP ... 341
Dạng 1. Tìm max, min bằng phương pháp đại số ... 341
Dạng 2. Tìm max, min bằng phương pháp hình học ... 341
Ⓑ BÀI TẬP TỰ LUYỆN ... 344
Bài 5. ĐỀ ÔN TẬP CUỐI CHƯƠNG 350
Ⓐ ĐỀ ÔN TẬP SỐ 1 ... 350

PHẦN I

GIẢI TÍCH

Chương 1

KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

§1. SỰ ĐỒNG BIẾN NGHỊCH BIẾN CỦA HÀM SỐ

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

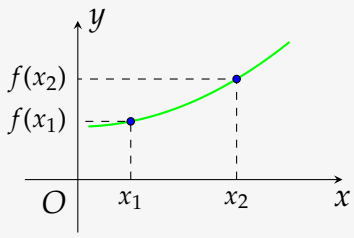
1. Định nghĩa tính đơn điệu của hàm số

Định nghĩa 1.1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a;b)$. Khi đó

☑ Hàm số đồng biến trên $(a;b)$ nếu

$$\forall x_1, x_2 \in (a;b): x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

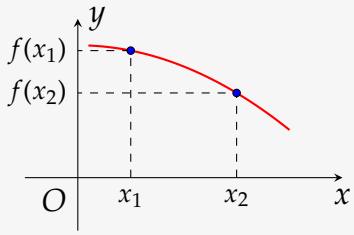
— Trên khoảng $(a;b)$, đồ thị là một "**đường đi lên**" khi xét từ trái sang phải.



☑ Hàm số nghịch biến trên $(a;b)$ nếu

$$\forall x_1, x_2 \in (a;b): x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

— Trên khoảng $(a;b)$, đồ thị là một "**đường đi xuống**" khi xét từ trái sang phải.



2. Các tính chất thường dùng cho hàm đơn điệu

Tính chất 1.1.

☑ Cho hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a;b)$. Xét $m, n \in (a;b)$.

① Nếu $f(m) = f(n)$ thì $m = n$.

② Nếu $f(m) > f(n)$ thì $m > n$.

③ Nếu $f(m) < f(n)$ thì $m < n$.

④ Với k là một số thực cho trước, phương trình $f(x) = k$ có không quá 1 nghiệm thực trên $(a;b)$.

☑ Cho hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(a;b)$. Xét $m, n \in (a;b)$.

① Nếu $f(m) = f(n)$ thì $m = n$.

② Nếu $f(m) > f(n)$ thì $m < n$.

③ Nếu $f(m) < f(n)$ thì $m > n$.

④ Với k là một số thực cho trước, phương trình $f(x) = k$ có không quá 1 nghiệm thực trên $(a;b)$.

3. Liên hệ giữa đạo hàm và tính đơn điệu

Định nghĩa 1.2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$.

① Nếu $y' \geq 0, \forall x \in (a;b)$ thì $y = f(x)$ đồng biến trên $(a;b)$.

② Nếu $y' \leq 0, \forall x \in (a;b)$ thì $y = f(x)$ nghịch biến trên $(a;b)$.

⚠ *Dấu bằng xảy ra chỉ tại các điểm "rời nhau".*

B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1 Tìm khoảng đơn điệu của một hàm số cho trước

a) Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số.

b) Tính y', giải phương trình $y' = 0$ tìm các nghiệm x_i (nếu có).

c) Lập bảng xét dấu y' trên miền $\mathscr{D}$. Từ dấu y', ta suy ra chiều biến thiên của hàm số.

- **Khoảng** y' mang dấu $-$: Hàm nghịch biến.
- **Khoảng** y' mang dấu $+$: Hàm đồng biến.

Ví dụ 1

Hàm số $y = x^2 - 4x + 4$ đồng biến trên các khoảng nào sau đây?

(A) $(-\infty;2)$. (B) $(2;+\infty)$. (C) $(-2;+\infty)$. (D) $-\infty;+\infty)$.

Ví dụ 2

Hàm số $y = -x^3 + 3x - 4$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(-\infty;-1)$. (B) $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$.

(C) $(1;+\infty)$. (D) $(-1;1)$.

Ví dụ 3

Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 2$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

(A) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;5)$.

(B) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và $(2;+\infty)$.

(C) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;+\infty)$.

(D) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;+\infty)$.

Ví dụ 4

Cho hàm số $y = x^3 + 3x + 2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

(B) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

(C) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

(D) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Ví dụ 5

Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 4$. Trong các phát biểu sau, đâu là phát biểu **sai**?

(A) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.

(B) Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$.

(C) Hàm số đồng biến trên $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.

(D) Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -1) \cup (0; 1)$.

Ví dụ 6

Cho hàm số $y = x^4 + 4x^2 + 3$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) Hàm số đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$.

(B) Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 0)$ và đồng biến trên $(0; +\infty)$.

(C) Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; +\infty)$.

(D) Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$ và nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

Ví dụ 7

Hàm số $y = -x^4 + 2x^3 - 2x - 1$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

(A) $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$. (B) $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$. (C) $(-\infty; 1)$. (D) $(-\infty; +\infty)$.

Ví dụ 8

Hàm số $y = x^4 + 8x^3 + 5$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(0; +\infty)$. (B) $(-\infty; -6)$. (C) $(-6; 0)$. (D) $(-\infty; +\infty)$.

Ví dụ 9

Cho hàm số $y = \dfrac{x+3}{x-3}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 3)$ và $(3; +\infty)$.

(B) Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 3)$ và $(3; +\infty)$.

(C) Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

(D) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Ví dụ 10

Cho hàm số $y=\dfrac{3-x}{x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

(B) Hàm số nghịch biến với mọi $x\neq 1$.

(C) Hàm số nghịch biến trên tập $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

(D) Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

Ví dụ 11

Hàm số nào sau đây nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó?

(A) $y=\dfrac{x-1}{x+1}$. (B) $y=\dfrac{2x+1}{x-3}$. (C) $y=\dfrac{x-2}{2x-1}$. (D) $y=\dfrac{x+5}{-x-1}$.

Ví dụ 12

Hàm số $y=\sqrt{2x-x^2}$ nghịch biến trên khoảng nào sau?

(A) $(0;1)$. (B) $(0;2)$. (C) $(1;2)$. (D) $(1;+\infty)$.

Ví dụ 13

Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

(A) $y=x^4+x^2+1$. (B) $y=\dfrac{1}{x-2}$.

(C) $y=x^3-3x^2+3x$. (D) $y=\dfrac{1}{x+3}$.

Dạng 2 Tìm khoảng đơn điệu của hàm số dựa vào bảng biến thiên

Cho bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$, ta chỉ việc nhìn các khoảng mà tại đó y' có dấu "+" hoặc dấu "-".

① Khoảng mà y' có dấu "+": hàm số $y=f(x)$ đồng biến;

② Khoảng mà y' có dấu "-": hàm số $y=f(x)$ nghịch biến.

Ví dụ 1

Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như hình bên dưới

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào sau đây?

(A) $(0;1)$. (B) $(3;4)$. (C) $(-2;4)$. (D) $(-4;2)$.

Ví dụ 2

Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên sau.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

(A) $(-\infty;5)$. (B) $(0;2)$. (C) $(2;+\infty)$. (D) $(0;+\infty)$.

Ví dụ 3

Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên dưới. Hàm số đã cho không đồng biến trên khoảng

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{5}{3}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

(A) $(-\infty;-3)$. (B) $(1;2)$. (C) $(1;4)$. (D) $(0;3)$.

Ví dụ 4

Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên sau.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$-$		$-$	
y	2	$\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	2

Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

(B) Hàm số đồng biến trên $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

(C) Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

(D) Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Dạng 3 Tìm khoảng đơn điệu của hàm số dựa vào đồ thị hàm số

☑ Nếu đề bài cho đồ thị $y=f(x)$, ta chỉ việc nhìn các khoảng mà đồ thị "đi lên" hoặc "đi xuống".

① Khoảng mà đồ thị "đi lên": hàm đồng biến;

② Khoảng mà đồ thị "đi xuống": hàm nghịch biến.

☑ Nếu đề bài cho đồ thị $y = f'(x)$. Ta tiến hành lập bảng biến thiên của hàm $y = f(x)$ theo các bước:

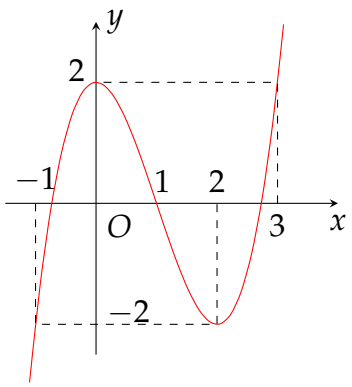
① Tìm nghiệm của $f'(x) = 0$ (hoành độ giao điểm với trục hoành);

② Xét dấu $f'(x)$ (phần trên Ox mang dấu dương; phần dưới Ox mang dấu âm);

③ Lập bảng biến thiên của $y = f(x)$, suy ra kết quả tương ứng.

Ví dụ 1

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới.

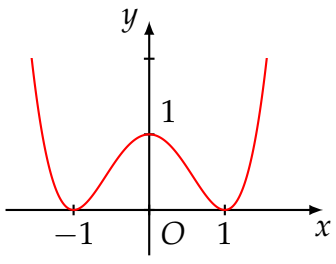


Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào?

(A) $(0;1)$. (B) $(-\infty;1)$. (C) $(-1;1)$. (D) $(-1;0)$.

Ví dụ 2

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên.

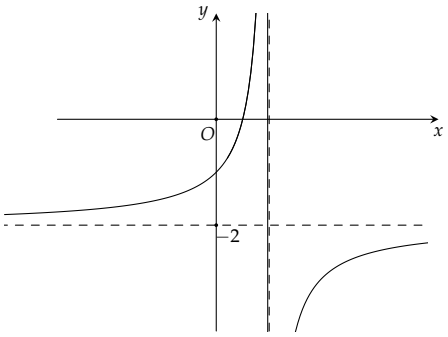


Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng nào?

(A) $(-\infty;0)$. (B) $(-\infty;-1)$. (C) $(1;+\infty)$. (D) $(-1;1)$.

Ví dụ 3

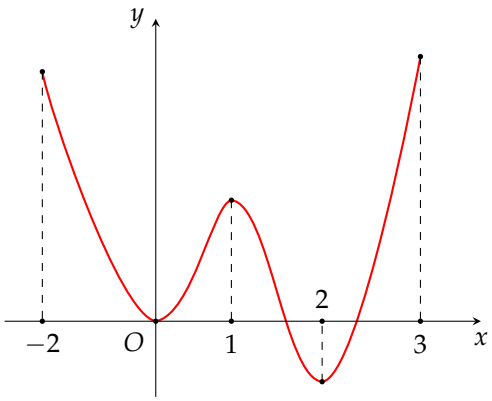
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.
Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào sau đây?



(A) $\mathbb{R}$.
(B) $(-\infty;1)$.
(C) $(-2;+\infty)$.
(D) $(-1;0)$.

Ví dụ 4

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng
(A) $(2;3)$.
(B) $(0;2)$.
(C) $(-2;1)$.
(D) $(1;2)$.

Dạng 4 Tìm m để hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đơn điệu trên $\mathbb{R}$

a) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $\boxed{y' \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta_{y'} \leq 0 \end{cases}$ hoặc suy biến $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c > 0. \end{cases}$

b) Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì $\boxed{y' \leq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta_{y'} \leq 0 \end{cases}$ hoặc suy biến $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c < 0. \end{cases}$

Ví dụ 1

Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^3 - 2mx^2 + 4x - 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là
(A) 2.
(B) vô số.
(C) 3.
(D) 4.

Ví dụ 2

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m-3)x - m + 2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

(A) $m \le -3, m \ge 1$. (B) $-3 < m < 1$. (C) $-3 \le m \le 1$. (D) $m \le 1$.

Ví dụ 3

Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = (m-1)x^3 - 3(m-1)x^2 + 3x + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

(A) $1 < m \le 2$. (B) $1 < m < 2$. (C) $1 \le m \le 2$. (D) $1 \le m < 2$.

Ví dụ 4

Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + 4x + 2m$, với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. Tìm tập S.

(A) $S = \{m \in \mathbb{Z} \mid |m| \geqslant 2\}$. (B) $S = \{-2;-1;0;1;2\}$.
(C) $S = \{-1;0;1\}$. (D) $S = \{m \in \mathbb{Z} \mid |m| > 2\}$.

Dạng 5 Tìm m để hàm "nhất biến" đơn điệu trên từng khoảng xác định

a) Tính $y' = \dfrac{ad-cb}{(cx+d)^2}$.

b) Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định của nó $\Leftrightarrow \boxed{y' > 0} \Leftrightarrow ad - cb > 0$.

c) Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó $\Leftrightarrow \boxed{y' < 0} \Leftrightarrow ad - cb < 0$.

Ví dụ 1

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{x+2-m}{x+1}$ nghịch biến trên các khoảng mà nó xác định.

(A) $m \le 1$. (B) $m \le -3$. (C) $m < -3$. (D) $m < 1$.

Ví dụ 2

Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y = \dfrac{x+m^2}{x+1}$ luôn đồng biến trên từng khoảng xác định.

(A) $m \in (-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$. (B) $m \in [-1;1]$.
(C) $m \in \mathbb{R}$. (D) $m \in (-1;1)$.

Dạng 6 Biện luận đơn điệu của hàm đa thức trên khoảng, đoạn cho trước

☑ **Loại 1:** Tìm điều kiện của tham số để hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đơn điệu trên khoảng con của tập $\mathbb{R}$.

Ta thường gặp hai trường hợp:

① Nếu phương trình $y' = 0$ giải được nghiệm "đẹp": Ta thiết lập bảng xét dấu y' theo các nghiệm vừa tìm *(xét hết các khả năng nghiệm trùng, nghiệm phân biệt)*. Từ đó "ép" khoảng mà dấu y' không thỏa mãn ra khỏi khoảng đề bài yêu cầu.

② Nếu phương trình $y' = 0$ nghiệm "xấu": Ta sử dụng 1 trong 2 cách sau
Cách 1. Dùng định lý về so sánh nghiệm (*sẽ nói rõ hơn qua bài giải cụ thể*).
Cách 2. Cô lập tham số m, dùng đồ thị (*cách này xét sau*).

☑ **Loại 2:** Tìm điều kiện của tham số để hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ đơn điệu trên khoảng con của tập $\mathbb{R}$.

① Giải phương trình $y' = 0$, tìm nghiệm.

② Biện luận các trường hợp nghiệm (*nghiệm trùng, nghiệm phân biệt*). Từ đó "ép" khoảng mà dấu y' không thỏa mãn ra khỏi khoảng đề bài yêu cầu.

Ví dụ 1

Giá trị m để hàm số $y = -x^3 + mx^2 - m$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$ là

(A) $0 < m < 3$. (B) $m \geq 3$. (C) $m \in [1;3]$. (D) $m \leq 3$.

Ví dụ 2

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3(m+2)x^2 + 3(m^2+4m)x + 1$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$?

(A) 1. (B) 4. (C) 3. (D) 2.

Ví dụ 3

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^4 - 2(m-1)x^2 + m - 2$ đồng biến trên khoảng $(1;3)$.

(A) $m \in [-5;2)$. (B) $m \in (-\infty;-5)$. (C) $m \in (2;+\infty)$. (D) $m \in (-\infty;2]$.

Dạng 7 Biện luận đơn điệu của hàm "nhất biến" trên khoảng, đoạn cho trước

☑ **Loại 1.** Tìm điều kiện của tham số để hàm $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ đơn điệu trên từng khoảng xác định.

① Tính $y' = \dfrac{ad-cb}{(cx+d)^2}$.

② Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định của nó $\Leftrightarrow \boxed{y' > 0} \Leftrightarrow ad - cb > 0$.

③ Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó $\Leftrightarrow \boxed{y' < 0} \Leftrightarrow ad - cb < 0$.

☑ **Loại 2.** Tìm điều kiện để hàm $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ đơn điệu trên khoảng $(m;n) \subset \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$.

① Tính $y' = \dfrac{ad-cb}{(cx+d)^2}$.

② Hàm số đồng biến trên khoảng $(m;n)$:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y' > 0 \\ -\dfrac{d}{c} \notin (m;n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ad - cb > 0 \\ -\dfrac{d}{c} \le m \text{ hoặc } -\dfrac{d}{c} \ge n \end{cases}$$

③ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(m;n)$:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y' < 0 \\ -\dfrac{d}{c} \notin (m;n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ad - cb < 0 \\ -\dfrac{d}{c} \le m \text{ hoặc } -\dfrac{d}{c} \ge n \end{cases}$$

Ví dụ 1

Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = \dfrac{x+2}{x+m}$ nghịch biến trên tập xác định của nó.

(A) $m \le 2$. (B) $m > 2$. (C) $m \ge 2$. (D) $m < 2$.

Ví dụ 2

Cho hàm số $y = \dfrac{mx - 2m - 3}{x - m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$. Tìm số phần tử của S.

(A) 3. (B) 4. (C) 5. (D) 1.

Ví dụ 3

Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x-m}$. Tìm m để hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2};1\right)$.

(A) $\dfrac{1}{2} < m \le 1$. (B) $m > \dfrac{1}{2}$. (C) $m \ge 1$. (D) $m \ge \dfrac{1}{2}$.

Dạng 8 Một số bài toán liên quan đến hàm hợp

☑ **Loại 1:** Cho đồ thị $y = f'(x)$, hỏi tính đơn điệu của hàm $y = f(x)$.

① Tìm nghiệm của $f'(x) = 0$ (hoành độ giao điểm với trục hoành);

② Xét dấu $f'(x)$ (phần trên Ox mang dấu dương; phần dưới Ox mang dấu âm);

③ Lập bảng biến thiên của $y = f(x)$, suy ra kết quả tương ứng.

☑ **Loại 2:** Cho đồ thị $y = f'(x)$, hỏi tính đơn điệu của hàm hợp $y = f(u)$.

① Tính $y' = u' \cdot f'(u)$;

② Giải phương trình $f'(u) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} u' = 0 \\ f'(u) = 0 (\textit{ Nhìn đồ thị, suy ra nghiệm.}) \end{bmatrix}$;

③ Lập bảng biến thiên của $y = f(u)$, suy ra kết quả tương ứng.

☑ **Loại 3:** Cho đồ thị $y = f'(x)$, hỏi tính đơn điệu của hàm $y = g(x)$, trong đó $g(x)$ có liên hệ với $f(x)$.

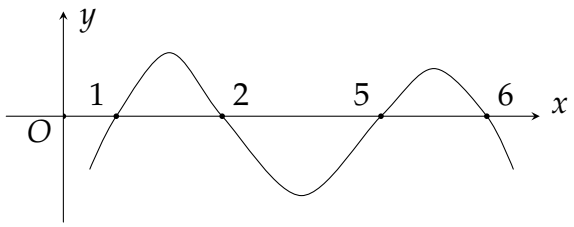
① Tính $y' = g'(x)$;

② Giải phương trình $g'(x) = 0$ (*thường dẫn đến việc giải phương trình liên quan đến* $f'(x)$. *Loại này ta nhìn hình để suy ra nghiệm*).

③ Lập bảng biến thiên của $y = g(x)$, suy ra kết quả tương ứng.

Ví dụ 1

Hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ (đồ thị $f'(x)$ cắt Ox ở các điểm có hoành độ lần lượt là 1, 2, 5, 6). Chọn khẳng định đúng.



(A) $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$.

(B) $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(5;6)$.

(C) $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1;5)$.

(D) $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(4;5)$.

Ví dụ 2

(**THPTQG – 2019, Mã đề 101**) Cho hàm số $f(x)$ có bẳng xét dấu $f'(x)$ như hình bên dưới

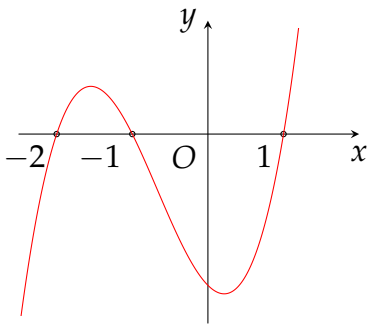
x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y = f(3-2x)$ nghịch biến trên khoảng

(A) $(4;+\infty)$. (B) $(-2;1)$. (C) $(2;4)$. (D) $(1;2)$.

Ví dụ 3

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới.



Hàm số $f(x^2-2)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

(A) $(0;1)$. (B) $(1;\sqrt{3})$. (C) $(-1;0)$. (D) $(-\sqrt{3};0)$.

HẾT

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BẢNG TÔ ĐÁP ÁN TỰ LUYỆN – ĐỀ SỐ 1

Học sinh làm BTTL xong, tô phương án đúng. Buổi học sau, cùng với GV kiểm tra kết quả.

1	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	7	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	13	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	19	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	25	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
2	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	8	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	14	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	20	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	26	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
3	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	9	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	15	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	21	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	27	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
4	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	10	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	16	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	22	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	28	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
5	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	11	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	17	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	23	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	29	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
6	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	12	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	18	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	24	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	30	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

Câu 1

Hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

Ⓐ $(1;3)$. Ⓑ $(2:+\infty)$. Ⓒ $(-\infty;0)$. Ⓓ $(0;3)$.

Câu 2

Cho hàm số $y=x^2(3-x)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.
Ⓑ Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(+\infty;3)$.
Ⓒ Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;2)$.
Ⓓ Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

Câu 3

Hàm số $y=2x^4+3$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(0;+\infty)$. Ⓑ $(-\infty;3)$. Ⓒ $(-\infty;0)$. Ⓓ $(3;+\infty)$.

Câu 4

Hàm số $y=x^4+8x^3+5$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(0;+\infty)$. Ⓑ $(-\infty;-6)$. Ⓒ $(-6;0)$. Ⓓ $(-\infty;+\infty)$.

Câu 5

Hàm số $y=x^4-2x^2+1$ đồng biến trên khoảng nào?

Ⓐ $(-1;0)$. Ⓑ $(-1;+\infty)$. Ⓒ $(-3;8)$. Ⓓ $(-\infty;-1)$.

Câu 6

Tìm tất cả các khoảng nghịch biến của hàm số $y=-x^4+8x^2-7$.

Ⓐ $(-2;0),(2;+\infty)$. Ⓑ $(-2;0)$.
Ⓒ $(-\infty;-2),(2;+\infty)$. Ⓓ $(2;+\infty)$.

Câu 7

Hàm số nào dưới đây nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$?

(A) $y=-x^3-x+3$.
(B) $y=-x^4+4x^2-2$.
(C) $y=x^3+4x^2-1$.
(D) $y=x^4-5x+7$.

Câu 8

Cho hàm số $y=x^3-5x^2+3x-4$ nghịch biến trên khoảng $(a;b)$ với $a<b;\ a,b\in\mathbb{R}$ và đồng biến trên các khoảng $(-\infty;a)$, $(b;+\infty)$. Tính $S=3a+3b$.

(A) $S=6$.
(B) $S=9$.
(C) $S=10$.
(D) $S=12$.

Câu 9

Tìm tất cả các khoảng nghịch biến của hàm số $y=-\frac{4}{3}x^3-2x^2-x-2017$.

(A) $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$.
(B) $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$ và $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$.
(C) $(-\infty;+\infty)$.
(D) $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$.

Câu 10

Cho hàm số $y=-x^3+1$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

(A) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$.
(B) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
(C) Hàm số đồng biến trên $(-\infty;0)$.
(D) Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 11

Cho hàm số $y=\frac{x-2}{x+3}$. Tìm khẳng định đúng?

(A) Hàm số xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{3\}$.
(B) Hàm số đồng biếntrên $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$.
(C) Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng xác định.
(D) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định.

Câu 12

Cho hàm số $y=\frac{3x-1}{x-2}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

(A) Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
(B) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.
(C) Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.
(D) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Câu 13

Hàm số nào sau đây nghịch biến trên tập xác định của nó?

(A) $y=\dfrac{x-2}{x-1}$. (B) $y=\dfrac{x-2}{x+1}$. (C) $y=-x^4+x^2$. (D) $y=-x^3+1$.

Câu 14

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)^2(x-1)^3(2-x)$. Hàm số đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(2;+\infty)$. (B) $(-1;1)$. (C) $(1;2)$. (D) $(-\infty;-1)$.

Câu 15

Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên dưới.

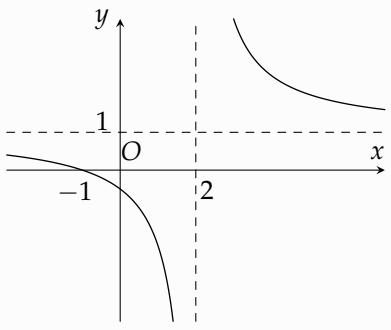
x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

(A) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;2)$.
(B) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;3)$.
(C) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.
(D) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;2)$.

Câu 16

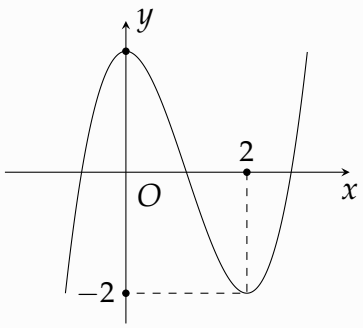
Đường cong của hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ với a, b, c, d là các số thực. Mệnh đề nào sau đây đúng?



(A) $y'<0, \forall x\neq 1$.
(B) $y'>0, \forall x\neq 1$.
(C) $y'>0, \forall x\neq 2$.
(D) $y'<0, \forall x\neq 2$.

Câu 17

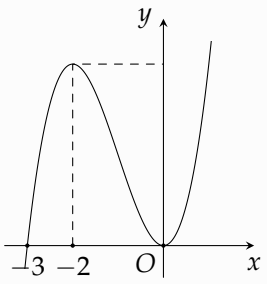
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?



(A) Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;+\infty)$.
(B) Hàm số đồng biến trên $(-\infty;2)$.
(C) Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)$.
(D) Hàm số nghịch biến trên $(1;+\infty)$.

Câu 18

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào?



(A) $(-\infty;0)$. (B) $(-3;+\infty)$. (C) $(-\infty;4)$. (D) $(-4;0)$.

Câu 19

Cho hàm số $y = \sqrt{x^2-6x+5}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) Hàm số đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$.
(B) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$.
(C) Hàm số đồng biến trên khoảng $(5;+\infty)$.
(D) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;3)$.

Câu 20

Hàm số $y = ax^3+bx^2+cx+d$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

(A) $\left[\begin{array}{l} a=b=0, c>0 \\ a>0; b^2-3ac\geq 0 \end{array}\right.$.
(B) $\left[\begin{array}{l} a=b=0, c>0 \\ a<0; b^2-3ac\leq 0 \end{array}\right.$.
(C) $\left[\begin{array}{l} a=b=0, c>0 \\ a>0; b^2-3ac\leq 0 \end{array}\right.$.
(D) $a>0; b^2-3ac\leq 0$.

Câu 21

Cho hàm số $f(x)$ có tính chất $f'(x)\geq 0,\ \forall x\in(0;3)$ và $f'(x)=0\ \forall x\in(1;2)$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

(A) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;3)$.
(B) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$.
(C) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(2;3)$.
(D) Hàm số $f(x)$ là hàm hằng (tức không đổi) trên khoảng $(1;2)$.

Câu 22

Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục và đồng biến trên $(0;2)$ thì hàm số $y=f(2x)$ luôn đồng biến trên khoảng nào?

(A) $(0;4)$. (B) $(0;2)$. (C) $(-2;0)$. (D) $(0;1)$.

Câu 23

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+(2m+1)x-3m-1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

(A) $m\in(-\infty;+\infty)$. (B) $m\le 0$. (C) $m\ge -\frac{1}{2}$. (D) $m<-\frac{1}{2}$.

Câu 24

Cho hàm số $y=-x^3-mx^2+(4m+9)x+5$, với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên $(-\infty;+\infty)$?

(A) 5. (B) 6. (C) 7 . (D) 4.

Câu 25

Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y=\frac{x+2}{x+m}$ nghịch biến trên các khoảng xác định của nó.

(A) $m\le 2$. (B) $m>2$. (C) $m\ge 2$. (D) $m<2$.

Câu 26

Cho hàm số $y=\frac{mx-2}{x+m-3}$. Các giá trị của m để hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định của nó là

(A) $1<m<2$. (B) $\left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<1 \end{array}\right.$. (C) $1<m\le 2$. (D) $m=1$.

Câu 27

Cho hàm số $f(x)=\frac{mx-4}{x-m}$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

(A) 5. (B) 4. (C) 3. (D) 2.

Câu 28

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\frac{mx+4}{x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

(A) 5. (B) 2. (C) 3. (D) 6.

Câu 29

Số tập con gồm 5 phần tử của tập hợp các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f(x) = \dfrac{x-1}{2x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-8)$ là

(A) 2000. (B) 2001. (C) 2002. (D) 2003.

Câu 30

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \dfrac{\tan x - 2}{\tan x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$.

(A) $m \leq 0$ hoặc $1 \leq m < 2$. (B) $m \leq 0$.

(C) $1 \leq m < 2$. (D) $m \geq 2$.

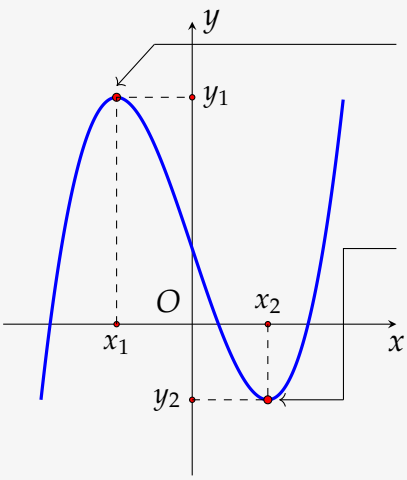
——HẾT——

§2. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

Phương pháp 2.1. Để tìm cực trị của hàm số ta chú ý một số vấn đề sau

- ☑ Hàm số đạt cực trị tại x_0 thì x_0 là nghiệm của phương trình $y' = 0$ hoặc x_0 là điểm mà tại đó đạo hàm không xác định (chiều ngược lại nói chung không đúng).
- ☑ Bảng tổng kết tên gọi:



$(x_1;y_1)$ là điểm cực đại của đồ thị hàm số
- x_1 là điểm cực đại của hàm số
- y_1 là giá trị cực đại của hàm số

$(x_2;y_2)$ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số
- x_2 là điểm cực tiểu của hàm số
- y_2 là giá trị cực tiểu của hàm số

B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1 Sử dụng quy tắc 1 để tìm cực trị cực hàm số cho bởi công thức

a) Giải phương trình $y' = 0$ tìm các nghiệm x_i và những điểm x_j mà đạo hàm không xác định;

b) Đưa các nghiệm x_i và x_j lên bảng xét dấu và xét dấu y';

c) Lập bảng biến thiên và nhìn "điểm dừng":

- "Dừng" trên cao tại điểm $(x_1;y_1)$ thì x_1 là điểm cực đại của hàm số; y_1 là giá trị cực đại (cực đại) của hàm số; $(x_1;y_1)$ là tọa độ điểm **cực đại của đồ thị**.
- "Dừng" dưới thấp tại điểm $(x_2;y_2)$ thì x_2 là điểm cực tiểu của hàm số; y_2 là giá trị cực tiểu (cực tiểu) của hàm số; $(x_2;y_2)$ là tọa độ điểm **cực tiểu của đồ thị**.

Ví dụ 1

Hàm số $y = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 - 3$ đạt cực đại tại

(A) $x = 0$. (B) $x = -\sqrt{3}$. (C) $x = \sqrt{3}$. (D) $x = \pm\sqrt{3}$.

Ví dụ 2

Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^4 - 1$ là

(A) $(-1;-1)$. (B) $(0;-1)$. (C) $(-1;0)$. (D) $(1;-1)$.

Ví dụ 3

Hàm số $y = x^3 - 3x + 2023$ đạt cực tiểu tại điểm

(A) $x = -1$. (B) $x = 3$. (C) $x = 0$. (D) $x = 1$.

Ví dụ 4

Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 4$ có bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 2. (B) 3. (C) 0. (D) 1.

Ví dụ 5

Trong các hàm số sau đây, hàm số nào không có cực trị?

(A) $y = x^3 - 3x^2 + 3$. (B) $y = x^4 - x^2 + 1$. (C) $y = x^3 + 2$. (D) $y = -x^4 + 3$.

Ví dụ 6

Hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Ví dụ 7

Hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 1$ đạt cực tiểu tại điểm có hoành độ

(A) $x = \pm\sqrt{2}$. (B) $x = \pm 1$. (C) $x = 1$. (D) $x = \pm 2$.

Ví dụ 8

Cho hàm số $y = -\dfrac{1}{4}x^4 + \dfrac{3}{2}x^2 - \dfrac{5}{4}$ có đồ thị (C). Tính diện tích của tam giác tạo thành từ 3 điểm cực trị của đồ thị (C).

(A) $S = \dfrac{5\sqrt{3}}{4}$. (B) $S = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$. (C) $S = \sqrt{3}$. (D) $S = \dfrac{9\sqrt{3}}{4}$.

Ví dụ 9

Cho hàm số $y = 3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x + 1$. Gọi $M\left(x_1; y_1\right)$ là điểm cực tiểu của đồ thị của hàm số đã cho. Tính tổng $x_1 + y_1$.

(A) 5. (B) -11. (C) 7. (D) 6.

Cực trị hàm số thường gặp

Trong ba hàm số mà ta thường gặp thì ta có nhận xét sau

- Hàm trùng phương luôn có cực trị (1 hoặc 3 cực trị) tùy thuộc vào nghiệm của y'.
- Hàm bậc ba ta có
  - Nếu $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt thì hàm số có hai cực trị;
  - Nếu $y' = 0$ có nghiệm kép hoặc vô nghiệm thì hàm số không có cực trị.

Hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ không có cực trị.

Dạng 2 Xác định cực trị khi biết bảng biến thiên hoặc đồ thị

Loại 1: Cho bảng biến thiên hoặc đồ thị hàm $y=f(x)$. Ta nhìn "điểm dừng":

① "Dừng" trên cao tại điểm $(x_1;y_1)$ thì x_1 là điểm cực đại của hàm số; y_1 là giá trị cực đại (cực đại) của hàm số; $(x_1;y_1)$ là tọa độ điểm **cực đại của đồ thị**

② "Dừng" dưới thấp tại điểm $(x_2;y_2)$ thì x_2 là điểm cực tiểu của hàm số; y_2 là giá trị cực tiểu (cực tiểu) của hàm số; $(x_2;y_2)$ là tọa độ điểm **cực tiểu của đồ thị**

Loại 2: Cho đồ thị hàm $f'(x)$. Ta thực hiện tương tự như ở phần đồng biến, nghịch biến.

Ví dụ 1

Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	4	↘	3	↗	$+\infty$

Cực tiểu (*giá trị cực tiểu*) của hàm số là

(A) 4. (B) 2. (C) -1. (D) 3.

Ví dụ 2

Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	-1	↗	2	↗	2	↘	$-\infty$

Khẳng định nào sau đây **sai**?

(A) Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và $x=1$.
(B) Giá trị cực tiểu của hàm số bằng -1.
(C) Giá trị cực đại của hàm số bằng 2.
(D) Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-2$.

Ví dụ 3

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=(x-1)(x-2)^2(x-3)^{2023}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(1;2)$ và $(3;+\infty)$.
(B) Hàm số có 3 điểm cực trị.

C Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;3)$.
D Hàm số đạt cực đại tại $x=2$, đạt cực tiểu tại $x=1$ và $x=3$.

Ví dụ 4

Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Mệnh đề nào dưới đây **sai**?
A Hàm số có ba cực trị.
B Hàm số có giá trị cực đại bằng 3.
C Hàm số có giá trị cực đại bằng 0.
D Hàm số có hai điểm cực tiểu.

Ví dụ 5

Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Khoảng cách giữa điểm cực đại và điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho bằng
A 3. **B** $\sqrt{10}$. **C** $\sqrt{2}$. **D** 2 .

Ví dụ 6

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^3(x-1)^2(x-6)^5\left(x^2+x+1\right), \forall x \in \mathbb{R}$. Hỏi hàm số đã cho có bao nhiêu điểm cực trị?

Ví dụ 7

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

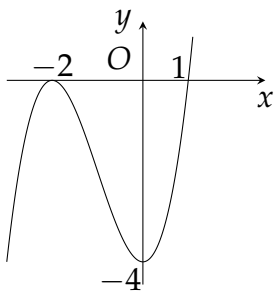
x	$-\infty$		-1		2		5		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho có phương trình

(A) $y=\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}$. (B) $y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$. (C) $y=-\frac{2}{3}x+\frac{13}{3}$. (D) $y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$.

Ví dụ 8

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và có đạo hàm $f'(x)$. Biết rằng hình vẽ dưới đây là đồ thị của hàm số $f'(x)$.

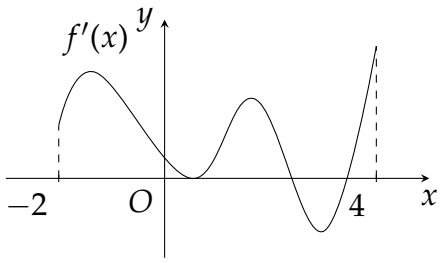


Khẳng định nào sau đây là đúng về cực trị của hàm số $f(x)$?

(A) Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=-2$.
(B) Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=1$.
(C) Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại $x=-1$.
(D) Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại $x=-2$.

Ví dụ 9

Tìm số điểm cực tiểu trên đoạn $[-2;4]$ của hàm số $y=f(x)$ biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



(A) 1. (B) 0. (C) 2. (D) 3.

Dạng 3 Sử dụng quy tắc 2 để tìm cực trị cực hàm số cho bởi công thức

Chỉ dùng khi hàm số có đạo hàm cấp 2 tại x_0. Ta thực hiện các bước:

a) Tính y'. Giải phương trình $y'=0$, tìm nghiệm x_0.

b) Tính y''.

- Nếu $y''(x_0)<0$ thì x_0 là điểm cực đại của hàm số.
- Nếu $y''(x_0)>0$ thì x_0 là điểm cực tiểu của hàm số.

Ghi nhớ: "âm" lồi, "dương" lõm

Ví dụ 1

Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 - x^2 + 2$ là

(A) $\left(\frac{2}{3}; \frac{50}{27}\right)$. (B) $(0;2)$. (C) $\left(\frac{50}{27}; \frac{2}{3}\right)$. (D) $(2;0)$.

Ví dụ 2

Tìm điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + 1$.

(A) $x = 0$. (B) $(0;1)$. (C) $x = -2$. (D) $(-2;-19)$.

Ví dụ 3

Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2018$. Khoảng cách giữa hai điểm cực tiểu của đồ thị hàm số bằng

(A) 2. (B) 4. (C) 1. (D) 3.

Ví dụ 4

Tìm điểm cực tiểu của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$.

(A) $x = -1$. (B) $x = 3$. (C) $x = -3$. (D) $x = 1$.

Ví dụ 5

Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị là (C). Gọi A, B là các điểm cực trị của (C). Tính độ dài đoạn thẳng AB.

(A) $AB = 2\sqrt{5}$. (B) $AB = 5$. (C) $AB = 4$. (D) $AB = 5\sqrt{2}$.

Ví dụ 6

Cho hàm số $y = f(x) = \sin 2x$. Hỏi trong khoảng $(0;2018)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

(A) 1285. (B) 2017. (C) 643. (D) 642.

BUỔI SỐ 2

Dạng 4 Tìm m để hàm số đạt cực trị tại điểm x_0 cho trước

a) Giải điều kiện $y'(x_0) = 0$, tìm m.

b) Thử lại với m vừa tìm được bằng một trong hai cách sau:

- Cách 1: Lập bảng biến thiên với m vừa tìm được. Xem giá trị m nào thỏa yêu cầu.
- Cách 2. Tính y''. Thử $y''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ là điểm CĐ; $y''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ là điểm CT.

Ví dụ 1

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 2mx^2 + m^2x + 2$ đạt cực tiểu tại $x = 1$.

(A) $m = 1$.
(B) $m = 3$.
(C) $m = 1$ hoặc $m = 3$.
(D) $m = -1$.

Ví dụ 2

Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$. Giá trị của tham số m để hàm số đạt cực đại tại $x = 3$ là
(A) $m = 1$.
(B) $m = -1$.
(C) $m = 5$.
(D) $m = -7$.

Ví dụ 3

Cho hàm số $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$ với m là tham số. Với giá trị nào của tham số m thì hàm số đạt cực đại tại $x = 2$?
(A) $m = -3$.
(B) $m = 3$.
(C) $m = -1$.
(D) $m = 0$.

Ví dụ 4

Hàm số $y = -x^4 + 2mx^2 + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 0$ khi
(A) $-1 \le m < 0$.
(B) $m \ge 0$.
(C) $m < -1$.
(D) $m > 0$.

Dạng 5 Biện luận cực trị hàm bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

a) Biện luận nghiệm phương trình $y' = 0$ (phương trình bậc hai).

- $\begin{cases} \Delta > 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$: Hàm số có hai điểm cực trị
- $\Delta \le 0$ hoặc suy biến $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$: Hàm số không có cực trị.

b) Định lý Vi-et: $x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a}$ và $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{3a}$ (nhìn trực tiếp từ hàm số).
- $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$;
- $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$
- $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)$.

c) Các công thức tính toán thường gặp
- Độ dài $MN = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2}$.
- Khoảng cách từ M đến Δ: $d(M, \Delta) = \frac{|Ax_M + By_M + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, với Δ: $Ax + By + C = 0$.
- Tam giác ABC vuông tại $A \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.
- Diện tích tam giác ABC là $S = \frac{1}{2}|a_1b_2 - a_2b_1|$, với $\overrightarrow{AB} = (a_1; b_1)$, $\overrightarrow{AC} = (a_2; b_2)$.

d) Phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị là $y = -\frac{2}{9a}(b^2 - 3ac)x + d - \frac{bc}{9a}$.

Ví dụ 1

Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+5mx-1$ không có cực trị?

(A) 6. (B) 3. (C) 5. (D) 4.

Ví dụ 2

Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y=x^3-3x^2+(m+1)x+2$ có hai điểm cực trị.

(A) $m<2$. (B) $m\le 2$. (C) $m>2$. (D) $m<-4$.

Ví dụ 3

Cho $y=(m-3)x^3+2(m^2-m-1)x^2+(m+4)x-1$. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục tung. Tìm số phần tử của S.

(A) 4. (B) 5. (C) 6. (D) 7.

Ví dụ 4

Gọi S là tập các giá trị dương của tham số m sao cho hàm số $y=x^3-3mx^2+9x-m$ đạt cực trị tại x_1,x_2 thỏa mãn $|x_1-x_2|\le 2$. Biết $S=(a;b]$. Tính $T=b-a$.

(A) $T=2+\sqrt{3}$. (B) $T=1+\sqrt{3}$. (C) $T=2-\sqrt{3}$. (D) $T=3-\sqrt{3}$.

Ví dụ 5

Cho hàm số $y=-x^3-3mx^2+m-2$ với m là tham số. Tổng tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A,B sao cho $AB=2$ bằng

(A) 2. (B) 3. (C) 0. (D) 1.

Dạng 6 Biện luận cực trị hàm trùng phương $y=ax^4+bx^2+c$

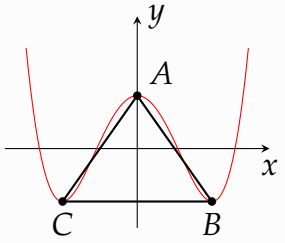
a) Tính $y'=4ax^3+2bx=2x(2ax^2+b)$; $y'=0\Leftrightarrow x=0$ hoặc $2ax^2+b=0$ (1).

b) Nhận xét:

- Hàm số có ba điểm cực trị khi (1) có hai nghiệm khác 0. Suy ra $ab<0$
- Hàm số có đúng một điểm cực trị $ab\ge 0$ và a,b không đồng thời bằng 0.

c) Các công thức tính nhanh:

- $\cos A=\dfrac{b^3+8a}{b^3-8a}$
- $S_{ABC}^2=-\dfrac{b^5}{32a^3}$.



Ví dụ 1

Cho hàm số $y=(m+1)x^4-mx^2+3$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số có ba điểm cực trị.

(A) $m\in(-\infty;-1)\cup[0;+\infty)$. (B) $m\in(-1;0)$.
(C) $m\in(-\infty;-1]\cup[0;+\infty)$. (D) $m\in(-\infty;-1)\cup(0;+\infty)$.

Ví dụ 2

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=(m^2+1)x^4+(m-2017)x^2-2018$ có đúng một điểm cực trị.

(A) $m<2017$. (B) $m\le 2017$. (C) $m\ge 2017$. (D) $m>2017$.

Ví dụ 3

Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trên đoạn $[-10;10]$ để hàm số $y=x^4-2(2m+1)x^2+7$ có ba điểm cực trị?

(A) 11. (B) Vô số. (C) 10. (D) 20.

Ví dụ 4

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^4+(6m-4)x^2+1-m$ là ba đỉnh của một tam giác vuông.

(A) $m=\dfrac{2}{3}$. (B) $m=\dfrac{1}{3}$. (C) $m=-1$. (D) $m=\sqrt[3]{3}$.

Ví dụ 5

Gọi m_0 là giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4+2mx^2-1$ có 3 điểm cực trị lập thành một tam giác có diện tích bằng $4\sqrt{2}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

(A) $m_0\in(-1;1]$. (B) $m_0\in(-2;-1]$. (C) $m_0\in(-\infty;-2]$. (D) $m_0\in(-1;0)$.

Dạng 7 Tìm m để hàm số đồ thị bất kì có cực trị

Ví dụ 1

Có tất cả bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=\dfrac{x^2-2mx+m+2}{x-m}$ có hai điểm cực trị?

(A) 2. (B) 3. (C) Vô số. (D) 1.

Ví dụ 2

Với tham số m, đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x^2-mx}{x+1}$ có hai điểm cực trị A,B và $AB=5$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $m>2$. (B) $0<m<1$. (C) $1<m<2$. (D) $m<0$.

Ví dụ 3

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-5;5]$ để hàm số $y = \left|x^4 + x^3 - \frac{1}{2}x^2 + m\right|$ có 5 điểm cực trị?

(A) 5. (B) 6. (C) 4. (D) 7.

Ví dụ 4

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $|3x^5 - 25x^3 + 60x + m|$ có 7 điểm cực trị?

(A) 42. (B) 21. (C) 40. (D) 20.

Ví dụ 5

Cho hàm số $y = \left|x^4 - 2(m-1)x^2 + 2m - 3\right|$ với m là tham số thực. Số giá trị nguyên không âm của m để hàm số đã cho có 3 điểm cực trị là

(A) 3. (B) 4. (C) 5. (D) 6.

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BẢNG TÔ ĐÁP ÁN TỰ LUYỆN – ĐỀ SỐ 1

Học sinh làm BTTL xong, tô phương án đúng. Buổi học sau, cùng với GV kiểm tra kết quả.

1	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	7	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	13	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	19	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	25	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
2	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	8	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	14	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	20	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	26	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
3	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	9	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	15	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	21	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	27	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
4	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	10	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	16	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	22	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	28	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
5	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	11	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	17	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	23	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	29	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
6	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	12	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	18	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	24	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	30	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

Câu 1

Tọa độ điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ là

Ⓐ $(0;1)$. Ⓑ $(2;-3)$. Ⓒ $(1;-1)$. Ⓓ $(3;1)$.

Câu 2

Gọi x_1 là điểm cực đại, x_2 là điểm cực tiểu của hàm số $y = -x^3 + 3x + 2$. Tính $x_1 + 2x_2$.

Ⓐ 2. Ⓑ 1. Ⓒ -1. Ⓓ 0.

Câu 3

Hiệu số giữa giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ là

Ⓐ 4. Ⓑ -4. Ⓒ -2. Ⓓ 2.

Câu 4

Điểm cực tiểu của hàm số $y = -x^4 + 5x^2 - 2$ là

Ⓐ $y = 0$. Ⓑ $x = -2$. Ⓒ $x = 0$. Ⓓ $y = -2$.

Câu 5

Cho hàm số $y = x^4 - 8x^3 + 1$. Chọn mệnh đề đúng.

Ⓐ Nhận điểm $x = 6$ làm điểm cực đại. Ⓑ Nhận điểm $x = 6$ làm điểm cực tiểu.
Ⓒ Nhận điểm $x = 0$ làm điểm cực đại. Ⓓ Nhận điểm $x = 0$ làm điểm cực tiểu.

Câu 6

Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 2$ là

Ⓐ 2. Ⓑ 3. Ⓒ 0. Ⓓ 1.

Câu 7

Tiếp tuyến tại điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 5$

(A) Có hệ số góc dương.
(B) Song song với trục hoành.
(C) Có hệ số góc bằng -1.
(D) Song song với đường thẳng $x = 1$.

Câu 8

Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$. Tính diện tích S của tam giác OAB với O là gốc tọa độ.

(A) $S = 8$. (B) $S = \sqrt{3}$. (C) $S = 2$. (D) $S = 4$.

Câu 9

Khoảng cách từ điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ đến trục tung bằng

(A) 1. (B) 2. (C) 4. (D) 0.

Câu 10

Cho hàm số $y = x^4 - 8x^2 + 10$ có đồ thị (C). Gọi A, B, C là ba điểm cực trị của đồ thị (C). Tính diện tích S của tam giác ABC.

(A) $S = 64$. (B) $S = 32$. (C) $S = 24$. (D) $S = 12$.

Câu 11

Tìm hàm số có đồ thị (C) nhận điểm $N(1; -2)$ là cực tiểu

(A) $y = x^4 - x^2 - 2$.
(B) $y = x^4 + 2x^2 - 4$.
(C) $y = -x^4 + 2x^2 - 3$.
(D) $y = x^4 - 2x^2 - 1$.

Câu 12

Cho hàm số $y = -x^4 + 2x^2 - 4$. Diện tích tam giác tạo bởi ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là

(A) 4. (B) $\frac{1}{2}$. (C) 1. (D) 2.

Câu 13

Hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 1. (B) 2. (C) 0. (D) 3.

Câu 14

Số điểm cực trị của hàm số $y = x^{2017}(x + 1)$ là

(A) 2017. (B) 2. (C) 1. (D) 0.

Câu 15

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $y' = f'(x) = 3x^3 - 3x^2$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

(A) Trên khoảng $(1; +\infty)$ hàm số đồng biến.
(B) Trên khoảng $(-1; 1)$ hàm số nghịch biến.
(C) Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị.
(D) Đồ thị hàm số có một điểm cực tiểu.

Câu 16

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^2(x-2)^3$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là

(A) 1.
(B) 2.
(C) 0.
(D) 3.

Câu 17

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Giá trị cực đại của hàm số là

(A) $y = 1$.
(B) $y = 0$.
(C) $x = 1$.
(D) $x = 0$.

Câu 18

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên dưới.

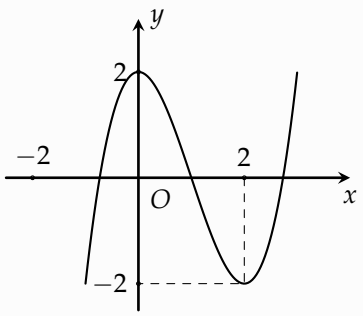
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$ 2

Hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 1.
(B) 2.
(C) 3.
(D) 4.

Câu 19

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



(A) Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 2.
(B) Hàm số có giá trị cực đại bằng 0.
(C) Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và cực tiểu tại $x = 2$.
(D) Hàm số có ba điểm cực trị.

Câu 20

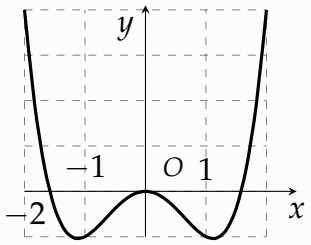
Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của đạo hàm như hình vẽ bên. Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	

(A) $x = 0$. (B) $x = 2$. (C) $y = 0$. (D) $y = 2$.

Câu 21

Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng K, biết đồ thị của hàm số $y' = f'(x)$ trên K như hình vẽ bên. Tìm số cực trị của hàm số $y = f(x)$ trên K.



(A) 1. (B) 2.
(C) 3. (D) 4.

Câu 22

Hàm số $y = x - 3\sqrt[3]{x^2}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 2. (B) 0. (C) 1. (D) 8.

Câu 23

Hàm số $y = x^3 - 2mx^2 + m^2x - 2$ đạt cực tiểu tại $x = 1$ khi

(A) $m = 3$. (B) $m = 1$. (C) $m = -1$. (D) $m = -3$.

Câu 24

Với giá trị nào của m thì hàm số $y = mx^3 - 3mx + 2$ đạt cực đại tại $x = 1$?

(A) $m = 3$. (B) $m < 0$. (C) $m = 1$. (D) $m \neq 0$.

Câu 25

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3m + 1$ có hai điểm cực trị.

(A) $m \geq 0$. (B) $\forall\, m \in \mathbb{R}$. (C) $m \leq 0$. (D) $m \neq 0$.

Câu 26

Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $f(x)=x^3-mx^2+\left(m+\dfrac{4}{3}\right)x+10$ có hai điểm cực trị. Hỏi có bao nhiêu số nguyên $m\in S$ và thỏa $|m|\leq 2018$?

(A) 4031. (B) 4036. (C) 4029. (D) 4033.

Câu 27

Cho hàm số $y=2x^3+3(m-1)x^2+6(m-2)x-18$. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số có hai điểm cực trị thuộc khoảng $(-5;5)$ là

(A) $(-\infty;-3)\cup(7;+\infty)$. (B) $(-3;+\infty)\setminus\{3\}$.

(C) $(-\infty;7)\setminus\{3\}$. (D) $(-3;7)\setminus\{3\}$.

Câu 28

Biết đồ thị hàm số $y=x^4+bx^2+c$ chỉ có một điểm cực trị là điểm có tọa độ $(0;-1)$, khi đó b và c thỏa mãn những điều kiện nào dưới đây?

(A) $b<0$ và $c=-1$. (B) $b\geq 0$ và $c>0$. (C) $b<0$ và $c<0$. (D) $b\geq 0$ và $c=-1$.

Câu 29

Cho hàm số $y=(m+1)x^4-mx^2+3$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số có ba điểm cực trị.

(A) $m\in(-\infty;-1)\cup(0;+\infty)$. (B) $m\in(-1;0)$.

(C) $m\in(-\infty;-1)\cup[0;+\infty)$. (D) $m\in(-\infty;-1]\cup[0;+\infty)$.

Câu 30

Cho hàm số $f(x)=x^4+4mx^3+3(m+1)x^2+1$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số có cực tiểu mà không có cực đại. Tính tổng các phần tử của tập S.

(A) 1. (B) 2. (C) 6. (D) 0.

——HẾT——

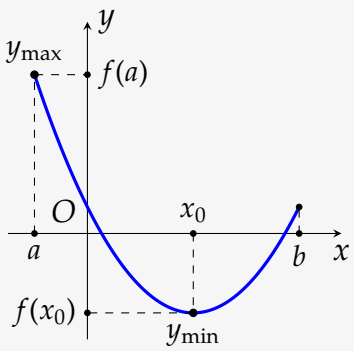
§3. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT - NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Định nghĩa giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất hàm số

Định nghĩa 3.1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập $\mathscr{D}$. Ta có

- M là giá trị lớn nhất của hàm số nếu $\begin{cases} f(x) \le M, \forall x \in \mathscr{D} \\ \exists x_0 \in \mathscr{D} : f(x_0) = M \end{cases}$.
  Kí hiệu $\max\limits_{x \in \mathscr{D}} f(x) = M$
- n là giá trị nhỏ nhất của hàm số nếu $\begin{cases} f(x) \ge n, \forall x \in \mathscr{D} \\ \exists x_0 \in \mathscr{D} : f(x_0) = n \end{cases}$.
  Kí hiệu $\min\limits_{x \in \mathscr{D}} f(x) = n$



2. Các phương pháp thường dùng để tìm max - min

Phương pháp 3.1. Ta thường dùng một số phương pháp sau

- Dùng đạo hàm (đối với hàm một biến), lập bảng biến thiên.
- Dùng bất đẳng thức đánh giá và kiểm tra dấu bằng
  ① Bất đẳng thức Cauchy: Với $a_1; a_2; \cdots; a_n$ là các số thực không âm, ta luôn có
  $$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \ge n\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}$$
  Dấu "=" xảy ra khi $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.
  ② Bất đẳng thức Bu-nhia-cốp-xki: Với hai bộ số $a_1; a_2; \cdots; a_n$ và $b_1; b_2; \cdots; b_n$, ta luôn có
  $$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \le \left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2\right)$$
  Dấu "=" xảy ra khi $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \cdots = \dfrac{a_n}{b_n}$.
- Dùng điều kiện có nghiệm của phương trình.
  Giả sử y_0 thuộc miền giá trị của hàm số $y = f(x)$. Khi đó, tồn tại $x \in \mathscr{D}$ để phương trình $f(x) = y_0$ có nghiệm. Biện luận điều kiện này, ta sẽ tìm được "khoảng dao động" của y_0. Từ đó suy ra max, min.

B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1 Tìm max – min của hàm số cho trước trên đoạn $[a; b]$

- Tìm các điểm $x_1; x_2; x_3; \ldots; x_n$ trên $[a; b]$, tại đó $f'(x) = 0$ hoặc $f'(x)$ không xác định;
- Tính $f(a); f(x_1); f(x_2); f(x_3); \ldots; f(x_n); f(b)$;
- Tìm số lớn nhất M và số nhỏ nhất m trong các số trên và kết luận.

Ví dụ 1

Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$ trên $[-4; 4]$. Tính tổng $M + m$.

(A) 12. (B) 98. (C) 17. (D) 73.

Ví dụ 2

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$ trên $[-4; 4]$.

Ví dụ 3

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$ trên $[-1; 3]$.

Ví dụ 4

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ trên đoạn $[0; 3]$ là

(A) $\min\limits_{[0;3]} y = \dfrac{1}{2}$. (B) $\min\limits_{[0;3]} y = -3$. (C) $\min\limits_{[0;3]} y = 1$. (D) $\min\limits_{[0;3]} y = -1$.

Ví dụ 5

Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$ trên đoạn $\left[-2; \dfrac{1}{2}\right]$ bằng

(A) 4. (B) -3. (C) $-\dfrac{7}{2}$. (D) $-\dfrac{13}{3}$.

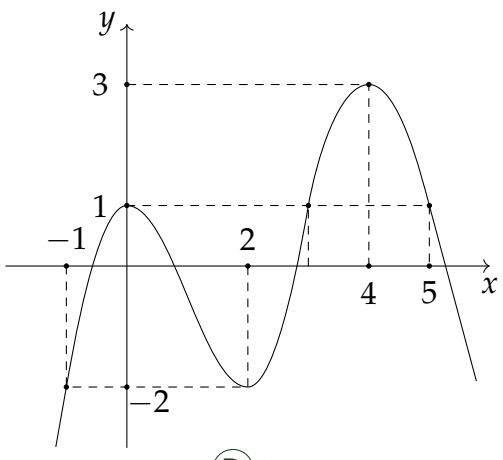
Ví dụ 6

Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = \sqrt{7 + 6x - x^2}$.

(A) $M = 4$. (B) $M = \sqrt{7}$. (C) $M = 7$. (D) $M = 3$.

Ví dụ 7

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 5]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 5]$.



(A) 4. (B) 5. (C) 6. (D) 1.

Dạng 2 Tìm max – min trên một khoảng $(a;b)$

Để tìm giá trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất trên một khoảng ta thường

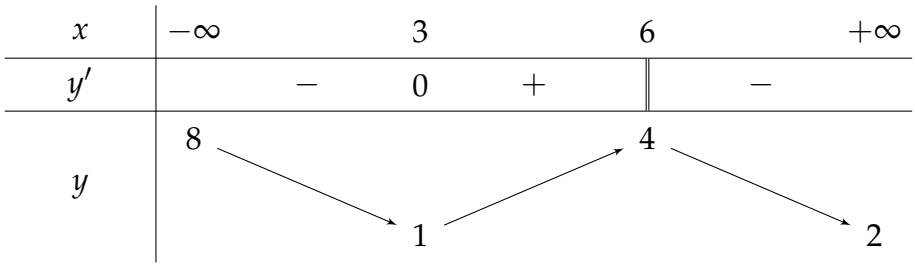
- Lập bảng biến thiên (dựa vào bảng biến thiên) để từ đó tìm được kết quả.
- Bất đẳng thức Cauchy: Với $a_1; a_2; \cdots; a_n$ là các số thực không âm, ta luôn có

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq n\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Ví dụ 1

Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên.

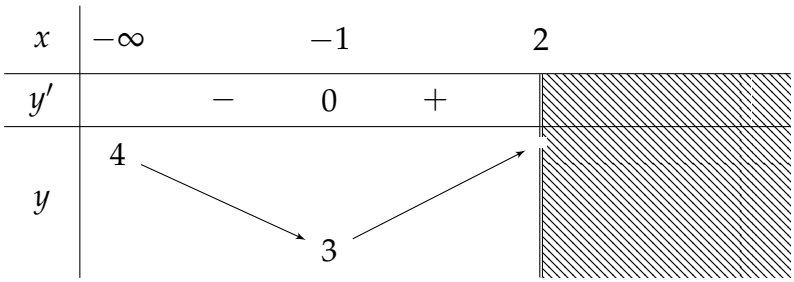


Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 1.
(B) Giá trị lớn nhất của hàm số bằng 4.
(C) Giá trị lớn nhất của hàm số bằng 8.
(D) Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 2.

Ví dụ 2

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(-\infty; 2]$ và có bảng biến thiên như hình bên.



Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

(A) $y_{CT} = 3$.
(B) $y_{CĐ} = 5$.
(C) $\min(-\infty; 2] = 3$.
(D) $\max(-\infty; 2] = 5$.

Ví dụ 3

Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	3	↗	4	↘	$-\infty$

Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

(A) Cực đại của hàm số là 4.
(B) Cực tiểu của hàm số là 3.
(C) $\max\limits_{\mathbb{R}} y = 4$.
(D) $\min\limits_{\mathbb{R}} y = 3$.

Ví dụ 4

Trên khoảng $(0;1)$, hàm số $y = x^3 + \dfrac{1}{x}$ đạt giá trị nhỏ nhất tại x_0 bằng

(A) $\dfrac{1}{2}$.
(B) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}$.
(C) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$.
(D) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Ví dụ 5

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3x + \dfrac{4}{x^2}$ trên khoảng $(0;+\infty)$ bằng

(A) $3\sqrt[3]{9}$.
(B) $2\sqrt[3]{9}$.
(C) $\dfrac{33}{5}$.
(D) $\dfrac{25}{4}$.

Dạng 3 Một số bài toán tìm max – min chứa tham số

Ví dụ 1

Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{mx+1}{x-m}$ trên đoạn $[1;2]$ bằng 3. Khi đó giá trị m thuộc khoảng nào dưới đây?

(A) $\left(-\dfrac{3}{4};0\right)$.
(B) $\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$.
(C) $\left(0;\dfrac{3}{4}\right)$.
(D) $\left(\dfrac{3}{4};11\right)$.

Ví dụ 2

Tìm m để hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + m$ có giá trị lớn nhất trên $[1;4]$ bằng 5.

Ví dụ 3

Gọi S là tổng giá trị của m để hàm số $f(x) = \dfrac{x - m^2 + m}{x+1}$ có giá trị nhỏ nhất trên $[0;1]$ bằng -2. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $S = -2$.
(B) $S = 1$.
(C) $S = -3$.
(D) $S = -1$.

Ví dụ 4

Với giá trị nào của m để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = -x^3 - 3x^2 + m$ trên $[-1;1]$ bằng 0?

(A) 0. (B) 4. (C) 2. (D) 6.

Ví dụ 5

Cho hàm số $f(x) = \dfrac{mx-1}{x+m}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\max\limits_{[0;1]} f(x) = 2$. Khi đó giá trị m bằng

(A) $m = \dfrac{1}{2}$. (B) $m = -\dfrac{1}{2}$. (C) $m = -3$. (D) $m = 1$.

Dạng 4 Một số bài toán vận dụng

a) Bài toán chuyển động:

- Gọi $s(t)$ là hàm quãng đường; $v(t)$ là hàm vận tốc; $a(t)$ là hàm giá tốc;
- Khi đó $s'(t) = v(t)$; $v'(t) = a(t)$.

b) Bài toán thực tế – tối ưu.

- Biểu diễn dữ kiện cần đạt max – min qua một hàm $f(t)$.
- Khảo sát hàm $f(t)$ trên miền điều kiện "đúng" và suy ra kết quả.

Ví dụ 1

Một đoàn tàu chuyển động thẳng khởi hành từ một nhà ga. Quãng đường (theo đơn vị mét (m)) đi được của đoàn tàu là một hàm số của thời gian t (theo đơn vị giây (s)) cho bởi phương trình là $S = 6t^2 - t^3$. Tìm thời điểm t mà tại đó vận tốc v(m/s) của đoàn tàu đạt giá trị lớn nhất?

(A) $t = 6$ s. (B) $t = 4$ s. (C) $t = 2$ s. (D) $t = 1$ s.

Ví dụ 2

Lúc 10 giờ sáng trên sa mạc, một nhà địa chất đang ở tại ví trí A, anh ta muốn đến vị trí B (bằng ô tô) trước 12 giờ trưa, với $AB = 70$ km. Nhưng trong sa mạc thì xe chỉ có thể di chuyển với vận tốc là 30 km/h. Cách vị trí A 10 km có một con đường nhựa chạy song song với đường thẳng nối từ A đến B. Trên đường nhựa thì xe có thể di chuyển với vận tốc 50 km/h. Tìm thời gian ít nhất để nhà địa chất đến vị trí B.

(A) 1 giờ 52 phút. (B) 1 giờ 58 phút. (C) 1 giờ 54 phút. (D) 1 giờ 56 phút.

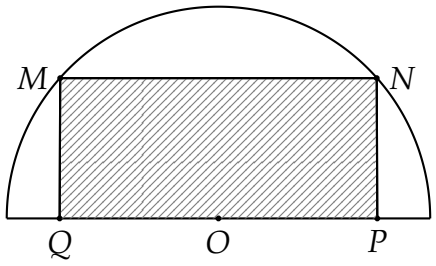
Ví dụ 3

Một chất điểm chuyển động với quãng đường $s(t)$ cho bởi công thức $s(t) = 6t^2 - t^3$, t (giây) là thời gian. Hỏi trong khoảng thời gian từ 0 đến 6 giây, vận tốc v (m/s) của chất điểm đạt giá trị lớn nhất tại thời điểm t (giây) bằng bao nhiêu?

(A) $t = 3$ s. (B) $t = 4$ s. (C) $t = 2$ s. (D) $t = 6$ s.

Ví dụ 4

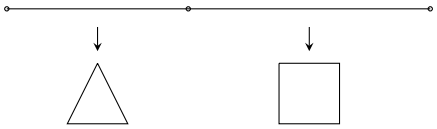
Từ một tấm tôn có hình dạng là nửa hình tròn bán kính $R = 3$, người ta muốn cắt ra một hình chữ nhật (hình vẽ bên). Diện tích lớn nhất có thể của tấm tôn hình chữ nhật là



(A) $\frac{9}{2}$. (B) $6\sqrt{2}$. (C) 9. (D) $9\sqrt{2}$.

Ví dụ 5

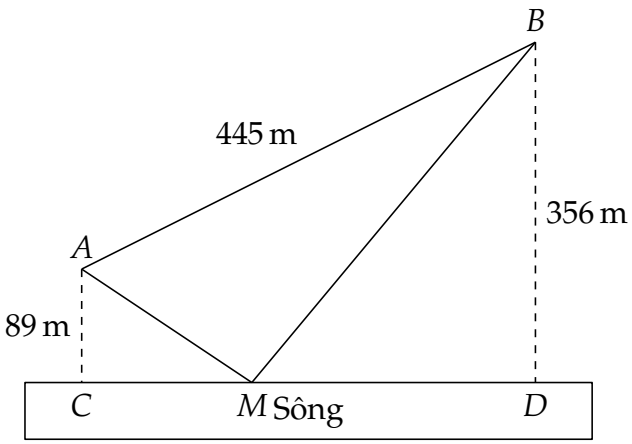
Một sợi dây có chiều dài là 6 m, được chia thành 2 phần. Phần thứ nhất được uốn thành hình tam giác đều, phần thứ hai uốn thành hình vuông. Hỏi độ dài của cạnh hình tam giác đều bằng bao nhiêu để tổng diện tích 2 hình thu được là nhỏ nhất?



(A) $\frac{12}{4+\sqrt{3}}$ m. (B) $\frac{18\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}$ m. (C) $\frac{36\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}$ m. (D) $\frac{18}{9+4\sqrt{3}}$ m.

Ví dụ 6

Cho hai vị trí A, B cách nhau 455 m, cùng nằm về một phía bờ sông. Khoảng cách từ A và B đến bờ sông lần lượt là 89 m và 356 m. Một người muốn đi từ A đến bờ sông để lấy nước mang về B (như hình vẽ). Đoạn đường ngắn nhất mà người đó có thể đi là (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



(A) 570 m. (B) 511 m. (C) 592 m. (D) 597 m.

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BẢNG TÔ ĐÁP ÁN TỰ LUYỆN

Học sinh làm BTTL xong, tô phương án đúng. Buổi học sau, cùng với GV kiểm tra kết quả.

1	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	7	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	13	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	19	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	25	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
2	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	8	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	14	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	20	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	26	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
3	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	9	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	15	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	21	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	27	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
4	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	10	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	16	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	22	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	28	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
5	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	11	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	17	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	23	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	29	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
6	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	12	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	18	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	24	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	30	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

Câu 1

Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ trên đoạn $[-4;4]$. Tính $T = M + 2m$.

Ⓐ $T = -41$. Ⓑ $T = -44$. Ⓒ $T = -43$. Ⓓ $T = -42$.

Câu 2

Giá trị lớn nhất của hàm số $y = -x^4 + 4x^2$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng

Ⓐ 1. Ⓑ 4. Ⓒ 5. Ⓓ 3.

Câu 3

Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$ trên đoạn $[1;3]$ bằng

Ⓐ $\dfrac{6}{7}$. Ⓑ $\dfrac{5}{6}$. Ⓒ $\dfrac{4}{5}$. Ⓓ $\dfrac{2}{3}$.

Câu 4

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x^2+3}{x+1}$ trên đoạn $[-4;-2]$ là

Ⓐ $\min\limits_{[-4;-2]} y = -7$. Ⓑ $\min\limits_{[-4;-2]} y = -\dfrac{19}{3}$. Ⓒ $\min\limits_{[-4;-2]} y = -8$. Ⓓ $\min\limits_{[-4;-2]} y = -6$.

Câu 5

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \sqrt{12 - 3x^2}$.

Ⓐ $\max y = 4, \min y = 2$. Ⓑ $\max y = 4, \min y = -2$.
Ⓒ $\max y = 2, \min y = -2$. Ⓓ $\max y = 2, \min y = -4$.

Câu 6

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

Xét ba khẳng định sau:

(1) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

(2) Hàm số có một cực đại.

(3) Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 3.

Số khẳng định đúng trong ba khẳng định trên là

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 0.

Câu 7

Tổng giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{2-x^2} - x$ bằng bao nhiêu?

(A) $2-\sqrt{2}$. (B) 2. (C) $2+\sqrt{2}$. (D) 1.

Câu 8

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $\min\limits_{(-1;+\infty)} f(x) = f(0)$.

(B) $\max\limits_{(0;+\infty)} f(x) = f(1)$.

(C) $\max\limits_{(-1;1]} f(x) = f(0)$.

(D) $\min\limits_{(-\infty;-1)} f(x) = f(-1)$.

Câu 9

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên dưới.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	‖	$-$	
y	$+\infty$	↘	0	↗	1	↘	$-\infty$

Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) Hàm số có hai điểm cực trị.

(B) Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 0 và giá trị lớn nhất bằng 1.

(C) Hàm số có giá trị cực đại bằng 0.

(D) Hàm số có đạt cực tiểu tại $x = 0$ và đạt cực đại tại $x = 1$.

Câu 10

Trên khoảng $(0;1)$, hàm số $y=x^3+\dfrac{1}{x}$ đạt giá trị nhỏ nhất tại x_0 bằng

(A) $\dfrac{1}{2}$. (B) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}$. (C) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$. (D) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 11

Hàm số $y=4\sin x-3\cos x$ có giá trị lớn nhất M, giá trị nhỏ nhất m là

(A) $M=7, m=1$. (B) $M=5, m=-5$. (C) $M=1, m=-7$. (D) $M=7, m=-7$.

Câu 12

Cho hàm số $y=\dfrac{x-m^2+m}{x+1}$. Tổng các giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0;1]$ bằng -2 là

(A) 2. (B) -2. (C) 0. (D) 1.

Câu 13

Gọi T là tập hợp tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{mx+1}{x+m^2}$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[2;3]$ bằng $\dfrac{5}{6}$. Tính tổng S của các phần tử trong T.

(A) $S=\dfrac{18}{5}$. (B) $S=\dfrac{17}{5}$. (C) $S=6$. (D) $S=2$.

Câu 14

Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{\cos^2 x-5\cos x+3}{\cos x-6}$ là

(A) $y_{\max}=\dfrac{1}{5}; y_{\min}=-\dfrac{9}{7}$. (B) $y_{\max}=13; y_{\min}=4$.

(C) $y_{\max}=1; y_{\min}=-\dfrac{9}{7}$. (D) $y_{\max}=\dfrac{1}{5}; y_{\min}=-1$.

Câu 15

Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y=\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}\cdot\sqrt{3-x}$ trên tập xác định của nó.

(A) $m=2\sqrt{2}-1$. (B) $m=\dfrac{4}{5}$. (C) $m=2\sqrt{2}-2$. (D) $m=\dfrac{9}{10}$.

Câu 16

Tìm m để bất phương trình $x^4-4x^2-m+1\le 0$ có nghiệm thực.

(A) $m\ge -3$. (B) $m\le 1$. (C) $m\ge 1$. (D) $m\le -3$.

Câu 17

Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x-m}{x+1}$, với m là tham số. Biết $\min\limits_{[0;3]} f(x)+\max\limits_{[0;3]} f(x)=-2$. Hãy chọn kết luận đúng?

(A) $m=2$. (B) $m>2$. (C) $m=-2$. (D) $m<-2$.

Câu 18

Tìm giá trị của tham số m để bất phương trình $\dfrac{x^2+3x+3}{x+1}\geq m$ nghiệm đúng với mọi $x\in[0;1]$.

(A) $m\leq 3$. (B) $m\leq\dfrac{7}{2}$. (C) $m\geq\dfrac{7}{2}$. (D) $m\geq 3$.

Câu 19

Cho $a>0$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{7(a^2+9)}{a}+\dfrac{a}{a^2+9}$ bằng

(A) $\dfrac{251}{3}$. (B) $2\sqrt{7}$. (C) $\dfrac{253}{3}$. (D) $\dfrac{253}{6}$.

Câu 20

Cho hai số thực x, y thay đổi thỏa mãn điều kiện $x^2+y^2=2$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2(x^3+y^3)-3xy$. Giá trị của $M+m$ bằng

(A) -4. (B) $-\dfrac{1}{2}$. (C) -6. (D) $1-4\sqrt{2}$.

Câu 21

M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\cos x(1+2\cos 2x)$. Tìm $2M-m$.

(A) 9. (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. (C) $6+\dfrac{\sqrt{3}}{9}$. (D) $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}+3$.

Câu 22

Cho biểu thức $P=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ với x, y khác 0. Giá trị nhỏ nhất của P bằng

(A) -2. (B) 0. (C) -1. (D) 1.

Câu 23

Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x)=4x^2+\dfrac{1}{x}-4$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

(A) $m=-1$. (B) $m=-4$. (C) $m=7$. (D) $m=-3$.

Câu 24

Gọi m và M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{2x+19}{x^2+16x+68}$. Tính tích mM.

(A) $mM=-0.20$. (B) $mM=-0.25$. (C) $mM=-0.15$. (D) $mM=-0.30$.

Câu 25

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\cos^2 2x-\sin x\cos x+4$ trên $\mathbb{R}$.

(A) $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)=\dfrac{7}{2}$. (B) $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)=3$. (C) $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)=\dfrac{10}{3}$. (D) $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)=\dfrac{16}{5}$.

Câu 26

Cho x, y là hai số thực không âm thỏa mãn $x+y=2$. Gọi a, b lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{1}{3}x^3+x^2+y^2-x+1$. Khi đó kết luận nào sau đây là đúng?

(A) $a+b=\dfrac{22}{3}$. (B) $a+b=\dfrac{10}{3}$. (C) $a+b=8$. (D) $a+b=\dfrac{32}{3}$.

Câu 27

Cho các số thực x,y thỏa mãn $x^2+2xy+3y^2=4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=(x-y)^2$.

(A) $\max P=8$. (B) $\max P=16$. (C) $\max P=12$. (D) $\max P=4$.

Câu 28

Một người thợ muốn làm một chiếc thùng hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông và không có nắp, biết thể tích của khối hộp là $V=2{,}16\ \text{m}^3$. Giá nguyên liệu để làm bốn mặt bên là 36000 đồng/m^2 và giá nguyên liệu để làm đáy là 90000 đồng/m^2. Tính các kích thước của hình hộp để chi phí làm chiếc thùng đó là nhỏ nhất.

(A) Cạnh đáy là 1,2 m, chiều cao là 1,8 m. (B) Cạnh đáy là 1,5 m, chiều cao là 1,2 m.
(C) Cạnh đáy là 1,7 m, chiều cao là 1 m. (D) Cạnh đáy là 1 m, chiều cao là 1,7 m.

Câu 29

Cho ba số dương x,y,z theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{\sqrt{x^2+8yz}+3}{\sqrt{(2y+z)^2+6}}$.

(A) $\dfrac{5}{2\sqrt{2}}$. (B) $\dfrac{5}{\sqrt{10}}$. (C) $\dfrac{6}{\sqrt{10}}$. (D) $\dfrac{6}{\sqrt{15}}$.

——HẾT——

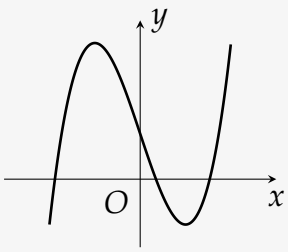
§4. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

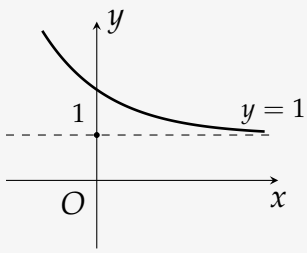
1. Đường tiệm cận ngang

Định nghĩa 4.1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên một khoảng vô hạn $(a;+\infty)$, $(-\infty;b)$ hoặc $(-\infty;+\infty)$. Đường thẳng $y = y_0$ là TCN của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = y_0$ hoặc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = y_0$.

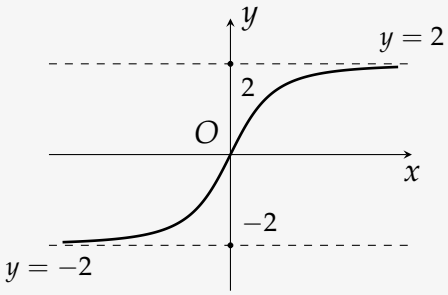
☑ Hình vẽ về tiệm cận ngang của đồ thị hàm số



Không có TCN



Có TCN $y = 1$



Có TCN $y = 2, y = -2$

☑ Các bước tìm TCN:

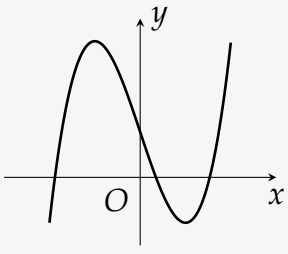
① Tính $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

② Xem ở "vị trí" nào ra kết quả hữu hạn thì ta kết luận có tiệm cận ngang ở "vị trí" đó.

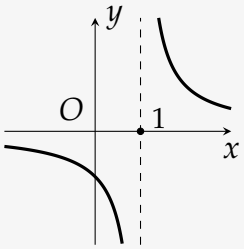
2. Đường tiệm cận đứng

Định nghĩa 4.2. Đường thẳng $x = x_0$ là TCĐ của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \infty$ hoặc $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \infty$.

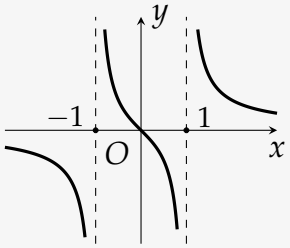
☑ Hình vẽ về tiệm cận đứng của đồ thị hàm số



Không có TCĐ



Có TCĐ $x = 1$



Có TCĐ $x = -1$ và $x = 1$

☑ Các bước tìm TCĐ

① Tìm nghiệm của mẫu, giả sử nghiệm đó là $x = x_0$.

② Tính giới hạn một bên tại x_0. Nếu xảy ra $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \infty$ hoặc $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \infty$ thì ta kết luận $x = x_0$ là đường tiệm cận đứng.

SỬ DỤNG MÁY TÍNH CASIO

- Sử dụng máy tính cầm tay để tìm tiệm cận ngang: Nhập biểu thức $f(x)$.
  - ① Bấm CACL $X = 10^8$ để kiểm tra khi $x \to +\infty$.
  - ② Bấm CACL $X = -10^8$ để kiểm tra khi $x \to -\infty$.
- Sử dụng máy tính cầm tay để tìm tiệm cận đứng: Nhập biểu thức $f(x)$.
  - ① Bấm CACL $X = x_0 - 0.000001$ để kiểm tra khi $x \to x_0^-$.
  - ② Bấm CACL $X = x_0 + 0.000001$ để kiểm tra khi $x \to x_0^+$.

B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1 Cho hàm số $y = f(x)$, tìm TCĐ và TCN của đồ thị tương ứng.

Thực hiện theo lý thuyết đã nêu trên. Chú ý các vấn đề thường gặp sau:

☑ Tính giới hạn của hàm số dạng phân thức $\dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots}{b_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots}$ khi $x \to \pm\infty$ để xác định TCN, ta thường gặp:

① bậc tử < bậc mẫu thì kết quả bằng 0.

② bậc tử = bậc mẫu thì kết quả bằng $\dfrac{a_n}{b_m}$.

③ bậc tử > bậc mẫu thì kết quả bằng ∞. Lúc này đồ thị không có đường TCN.

☑ Khi tìm TCĐ, trước tiên ta tìm nghiệm của mẫu. Chú ý:

① Những nghiệm "đơn" không thỏa tử đều nhận.

② Những nghiệm "đơn" thỏa tử đều bị loại.

☑ Đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ luôn có TCĐ $x = -\dfrac{d}{c}$ và TCN: $y = \dfrac{a}{c}$.

Ví dụ 1

Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-4}{x+2}$ là

(A) $y = 2$. (B) $x = 2$. (C) $x = -2$. (D) $y = -2$.

Ví dụ 2

Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+1}{1-x}$.

(A) $y = -2$. (B) $x = -2$. (C) $y = 2$. (D) $x = 1$.

Ví dụ 3

Hàm số nào có đồ thị nhận đường thẳng $x=2$ làm đường tiệm cận đứng?

(A) $y=x-2+\dfrac{1}{x+1}$.
(B) $y=\dfrac{1}{x+1}$.
(C) $y=\dfrac{2}{x+2}$.
(D) $y=\dfrac{5x}{2-x}$.

Ví dụ 4

Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x+1}{x-2}$ là đường thẳng

(A) $x=-2$.
(B) $x=2$.
(C) $y=3$.
(D) $y=-\dfrac{1}{2}$.

Ví dụ 5

Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x^2+4x-5}$ có phương trình là

(A) $x=-1$.
(B) $y=1; y=-5$.
(C) $x=1; x=-5$.
(D) $x=\pm 5$.

Ví dụ 6

Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3}{x-2}$ là

(A) 1.
(B) 2.
(C) 0.
(D) 3.

Ví dụ 7

Tìm số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}$.

(A) 1.
(B) 0.
(C) 2.
(D) 3.

Ví dụ 8

Tìm toạ độ giao điểm I của hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{2-3x}$.

(A) $I\left(\dfrac{2}{3};1\right)$.
(B) $I\left(\dfrac{2}{3};-\dfrac{2}{3}\right)$.
(C) $I\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{2}{3}\right)$.
(D) $I\left(-\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3}\right)$.

Ví dụ 9

Cho hàm số $y=\dfrac{1-2x}{x+3}$ có đồ thị (C). Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

(A) Tâm đối xứng của đồ thị (C) là điểm $I(3;2)$.
(B) Điểm $P(-3;2017)$ thuộc đường tiệm cận đứng của đồ thị (C).
(C) Đường thẳng $y=-2$ là tiệm cận ngang của (C).
(D) Đường thẳng $x=-3$ là tiệm cận đứng của (C).

Ví dụ 10

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong (C) và các giới hạn $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$. Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) Đường thẳng $y=2$ là tiệm cận ngang của (C).
(B) Đường thẳng $y=1$ là tiệm cận ngang của (C).
(C) Đường thẳng $x=2$ là tiệm cận ngang của (C).
(D) Đường thẳng $x=2$ là tiệm cận đứng của (C).

Ví dụ 11

Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}$ là

(A) 3. (B) 2. (C) 0. (D) 1.

Ví dụ 12

Đồ thị hàm số $y=\sqrt{4x^2+4x+3}-\sqrt{4x^2+1}$ có bao nhiêu đường tiệm cận ngang?

(A) 2. (B) 0. (C) 1 . (D) 3 .

Ví dụ 13

Hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x+1}{x-4}$ cắt hai trục tọa độ tại các điểm A,B. Bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB là

(A) $R=4$. (B) $R=5$. (C) $R=\dfrac{5}{2}$. (D) $R=3$.

Dạng 2 Xác định TCN và TCĐ khi biết bảng biến thiên hàm số $y=f(x)$

☑ Nhìn "vị trí" $\pm\infty$ để xác định đường TCN.

① Nếu "vị trí" nào ra kết quả hữu hạn thì vị trí đó có TCN.
② Nếu "vị trí" nào không tồn tại hoặc ra kết quả ∞ thì "vị trí" đó không có TCN.

☑ Nhìn "vị trí có hai gạch sọc" để xác định TCĐ.

① Nếu "vị trí" nào xuất hiện ∞ thì vị trí đó là TCĐ.
② Nếu "vị trí" nào không xuất hiện ∞ ở cả hai bên (giới hạn trái và giới hạn phải) thì vị trí đó không là TCĐ.

Ví dụ 1

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình bên.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1 $\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Chọn khẳng định đúng.

(A) Đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận ngang.

(B) Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang.

(C) Đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận đứng.

(D) Đồ thị hàm số không có tiệm đứng và tiệm cận ngang.

Ví dụ 2

Cho bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ như sau.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	3

Đồ thị của hàm số đã cho có tổng số bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

(A) 3. (B) 1. (C) 0. (D) 2.

Ví dụ 3

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	
y	-2	$\searrow$	$+\infty$ $\|\|$ $-\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$ $\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	-2

Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số là

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

Ví dụ 4

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$		$-$	0	$+$			
y		$\nearrow$	3	$\searrow$	$+\infty$	$\nearrow$	$+\infty$		
			-2		-2				

(A) 4. (B) 2. (C) 3. (D) 1.

Dạng 3 Một số bài toán biện luận theo tham số m

Ví dụ 1

Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{mx+2}{x-5}$ có đường tiệm cận ngang đi qua điểm $A(1;3)$.

(A) $m=-3$. (B) $m=1$. (C) $m=-1$. (D) $m=3$.

Ví dụ 2

Cho hàm số $y=\dfrac{ax+1}{bx-2}$, xác định a và b để đồ thị của hàm số trên nhận đường thẳng $x=1$ làm tiệm cận đứng và đường thẳng $y=\dfrac{1}{2}$ làm tiệm cận ngang.

(A) $\begin{cases}a=-1\\b=-2\end{cases}$. (B) $\begin{cases}a=1\\b=2\end{cases}$. (C) $\begin{cases}a=2\\b=2\end{cases}$. (D) $\begin{cases}a=2\\b=-2\end{cases}$.

Ví dụ 3

Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2-5x+m}{x-m}$ có tiệm cận đứng.

(A) $\left[\begin{array}{l}m=0\\m=2\end{array}\right.$. (B) $m\neq 0$. (C) $m\neq 2$. (D) $\begin{cases}m\neq 0\\m\neq 2\end{cases}$.

Ví dụ 4

Biết rằng hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-m}$ (với m là tham số) tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng 2. Giá trị của m là

(A) $m=\pm 2$. (B) $m=-1$. (C) $m=2$. (D) $m=\pm 1$.

Ví dụ 5

Tìm tất cả các điểm trên đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-2}$ sao cho tổng khoảng cách từ điểm đó đến hai đường tiệm cận là nhỏ nhất.

(A) $\left(2+\sqrt{3};1+\sqrt{3}\right)$ và $\left(2-\sqrt{3};1-\sqrt{3}\right)$. (B) $\left(1+\sqrt{3};2-\sqrt{3}\right)$ và $\left(1-\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right)$.
(C) $\left(1+\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right)$ và $\left(1-\sqrt{3};2-\sqrt{3}\right)$. (D) $\left(2+\sqrt{3};1-\sqrt{3}\right)$ và $\left(2-\sqrt{3};1+\sqrt{3}\right)$.

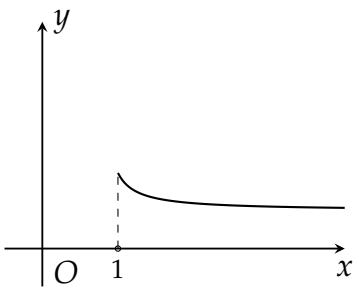
Ví dụ 6

Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x^2-mx+1}$ có đúng 3 đường tiệm cận.

(A) $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m>2\\ m\neq\dfrac{5}{2}\end{cases}\\ m<-2\end{array}\right.$. (B) $\left[\begin{array}{l}m>2\\ \begin{cases}m<-2\\ m\neq-\dfrac{5}{2}\end{cases}\end{array}\right.$. (C) $\left[\begin{array}{l}m>2\\ m<-2\end{array}\right.$. (D) $-2<m<2$.

Ví dụ 7

Hỏi có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(a;b)$ để hàm số $y=\dfrac{2x-a}{4x-b}$ có đồ thị trên $(1;+\infty)$ như hình vẽ bên?



(A) 1. (B) 4. (C) 2. (D) 3.

Ví dụ 8

Đồ thị của hàm số $y=\dfrac{ax+1}{x+2b+3}$, $a,b\in\mathbb{R}$ nhận trục hoành và trục tung làm hai đường tiệm cận. Tính $a+b$.

(A) $a+b=-3$. (B) $a+b=-\dfrac{3}{2}$. (C) $a+b=3$. (D) $a+b=\dfrac{3}{2}$.

Ví dụ 9

Tìm m để tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{(m-1)x+2}{3x+4}$ cắt đường thẳng $2x-3y+5=0$ tại điểm có hoành độ bằng 2.

(A) $m=10$. (B) $m=7$. (C) $m=2$. (D) $m=1$.

Ví dụ 10

Biết hai đường thẳng $x=1$ và $y=0$ lần lượt là đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{(a-2b)x^2+bx+1}{x^2+x-b}$. Giá trị $a+b$ bằng

(A) 6. (B) 7. (C) 8. (D) 10.

Ví dụ 11

Cho hàm số $y=\dfrac{ax+1}{bx-2}$. Tìm a và b để đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x=1$ là tiệm cận đứng và đường thẳng $y=\dfrac{1}{2}$ là tiệm cận ngang.

(A) $a=1,b=2$. (B) $a=2,b=2$. (C) $a=2,b=-2$. (D) $a=-1,b=-2$.

Ví dụ 12

Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x-m}{x-1}$ không có tiệm cận đứng?

(A) 2. (B) 3. (C) 1. (D) 0.

Ví dụ 13

Biết hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-m}$ (m là tham số thực) tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng 2. Giá trị của m bằng bao nhiêu?

(A) $m=\pm 1$. (B) $m=\pm 2$. (C) $m=2$. (D) $m=1$.

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BẢNG TÔ ĐÁP ÁN TỰ LUYỆN

Học sinh làm BTTL xong, tô phương án đúng. Buổi học sau, cùng với GV kiểm tra kết quả.

1	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	7	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	13	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	19	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	25	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
2	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	8	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	14	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	20	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	26	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
3	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	9	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	15	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	21	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	27	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
4	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	10	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	16	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	22	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	28	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
5	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	11	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	17	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	23	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	29	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
6	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	12	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	18	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	24	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	30	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

Câu 1

Phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-3}{x-1}$ là

Ⓐ $y=5$. Ⓑ $y=0$. Ⓒ $x=1$. Ⓓ $y=1$.

Câu 2

Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{2x-2}$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

Ⓐ Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=\dfrac{1}{2}$.

Ⓑ Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=-\dfrac{1}{2}$.

Ⓒ Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=\dfrac{1}{2}$.

Ⓓ Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=2$.

Câu 3

Số đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x+1}{x^2-4}$ là

Ⓐ 2. Ⓑ 1. Ⓒ 4. Ⓓ 3.

Câu 4

Đường thẳng $y=2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số nào sau đây?

Ⓐ $y=\dfrac{2x^2+1}{2-x}$. Ⓑ $y=\dfrac{x^2+2x+1}{1+x}$. Ⓒ $y=\dfrac{x+1}{1-2x}$. Ⓓ $y=\dfrac{2x-2}{x+2}$.

Câu 5

Cho hàm số $y=f(x)$ có $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-2$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.

Ⓑ Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.

(C) Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là hai đường thẳng $x = -2$ và $x = 2$.
(D) Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là hai đường thẳng $y = -2$ và $y = 2$.

Câu 6

Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = y_0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$. Tìm kết luận đúng trong các kết luận sau.
(A) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = y_0$.
(B) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = y_0$.
(C) Đồ thị hàm số không có tiệm cận.
(D) Đồ thị hàm số có cả tiệm cận đứng, tiệm cận ngang.

Câu 7

Cho hàm số $y = \dfrac{2017}{x-2}$ có đồ thị (H). Số đường tiệm cận của (H) là
(A) 0. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

Câu 8

Cho đồ thị (C): $y = \dfrac{x-3}{x+2}$ có hai đường tiệm cận cắt nhau tại I. Tính độ dài đoạn thẳng OI (với O là gốc tọa độ).
(A) $OI = \sqrt{3}$. (B) $OI = \sqrt{2}$. (C) $OI = 1$. (D) $OI = \sqrt{5}$.

Câu 9

Số đường tiệm cận (đứng và ngang) của đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{x^2}$ là bao nhiêu?
(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Câu 10

Tìm số tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+1}{x^2-3x+2}$.
(A) 3. (B) 2. (C) 1. (D) 0.

Câu 11

Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2+2x-3}{x^2-1}$ có đường tiệm cận ngang là
(A) $y = 2$. (B) $y = \pm 2$. (C) $y = 1$. (D) $y = \pm 1$.

Câu 12

Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-1}{|x|+1}$ có bao nhiêu đường tiệm cận (đứng và ngang)?
(A) 1. (B) 2. (C) 0. (D) 3.

Câu 13

Đồ thị hàm số $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4x}-\sqrt{x^2-3x}}$ có bao nhiêu đường tiệm cận ngang?

(A) 3. (B) 1. (C) 4. (D) 2.

Câu 14

Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x}$ có đồ thị (C). Gọi d là tích khoảng cách từ một điểm bất kì trên (C) đến các đường tiệm cận của (C). Tính d.

(A) $\mathrm{d}=1$. (B) $\mathrm{d}=\sqrt{2}$. (C) $\mathrm{d}=2$. (D) $\mathrm{d}=2\sqrt{2}$.

Câu 15

Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$		$+$	
y	2	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	5

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

(A) 4. (B) 1. (C) 3. (D) 2.

Câu 16

Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$+$		$+$	0	$-$	
y	-1	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	2	↘	$-\infty$

Hỏi đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tổng số bao nhiêu tiệm cận (tiệm cận đứng và tiệm cận ngang)?

(A) 0. (B) 2. (C) 3. (D) 1.

Câu 17

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	‖	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	-2	↘	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↘	-1	↘	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↘	2

Khẳng định nào sau đây **sai**?

(A) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y=-2, y=2$.

(B) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có hai tiệm cận đứng là các đường thẳng $x=1, x=-1$.

(C) Hàm số $y=f(x)$ không có đạo hàm tại điểm $x=0$.

(D) Hàm số $y=f(x)$ đạt cực trị tại điểm $x=0$.

Câu 18

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $(-2;0)\cup(0;+\infty)$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $f(x)$ là

(A) 4. (B) 2.

(C) 1. (D) 3.

x	-2		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	‖	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ 1	↘	0

Câu 19

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình bên.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	‖	$-$	0	$+$	
y	2	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$

Hỏi đồ thị hàm số có bao nhiêu đường tiệm cận?

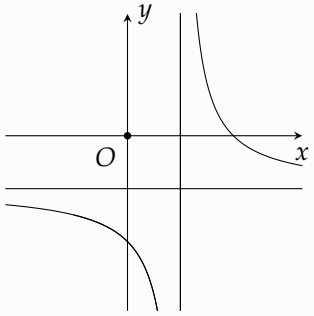
(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

Câu 20

Cho hàm số $y=\dfrac{ax-b}{x-1}$ có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

(A) $b<0<a$. (B) $0<b<a$.

(C) $b<a<0$. (D) $a<b<0$.



Câu 21

Cho hàm số $y=\dfrac{2x^2-3x+m}{x-m}$ có đồ thị (C). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để (C) không có tiệm cận đứng.

(A) $m=0$ hoặc $m=1$.
(B) $m=2$.
(C) $m=1$.
(D) $m=0$.

Câu 22

Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-m}$ đi qua điểm $M(2;5)$ khi m bằng bao nhiêu?

(A) $m=-2$.
(B) $m=-5$.
(C) $m=5$.
(D) $m=2$.

Câu 23

Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	4	↘	-2	↗	$+\infty$

Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2018}{f(x)}$ là

(A) 4.
(B) 1.
(C) 3.
(D) 2.

Câu 24

Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x^2+2mx+1}$ có hai tiệm cận đứng là

(A) $(-1;1)$.
(B) $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.
(C) $\left\{-\dfrac{5}{4}\right\}$.
(D) $\left(-\infty;-\dfrac{5}{4}\right)\cup\left(-\dfrac{5}{4};-1\right)\cup(1;+\infty)$.

Câu 25

Cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{mx^2-2x+3}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số đã cho có đúng hai đường tiệm cận.

(A) 2.
(B) 3.
(C) 0.
(D) 1.

Câu 26

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{4x-5}{x-m}$ có tiệm cận đứng nằm bên phải trục tung.

(A) $m < 0$. (B) $m > 0$ và $m \neq \dfrac{5}{4}$.

(C) $m > 0$. (D) $m > 0$ và $m \neq -\dfrac{5}{4}$.

Câu 27

Biết rằng đồ thị của hàm số $y = \dfrac{(a-3)x + a + 2018}{x - (b+3)}$ nhận trục hoành làm tiệm cận ngang và trục tung làm tiệm cận đứng. Khi đó giá trị của $a + b$ là

(A) 3. (B) -3. (C) 6. (D) 0.

Câu 28

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$ $-\infty$

Đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{2f(x) - 5}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

(A) 0. (B) 2. (C) 1. (D) 4.

Câu 29

Tập hợp các giá trị m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{mx^2 + 6x - 2}{x + 2}$ có tiệm cận đứng là

(A) $\left\{\dfrac{7}{2}\right\}$. (B) $\mathbb{R}$. (C) $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{7}{2}\right\}$. (D) $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{7}{2}\right\}$.

Câu 30

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 2mx + 2m}$ có đúng 3 đường tiệm cận.

(A) $m \neq -\dfrac{1}{4}$. (B) $\left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > 2 \end{array}\right.$. (C) $\left[\begin{array}{l} m > 2 \\ \left\{\begin{array}{l} m < 0 \\ m \neq -\dfrac{1}{4} \end{array}\right. \end{array}\right.$. (D) $0 < m < 2$.

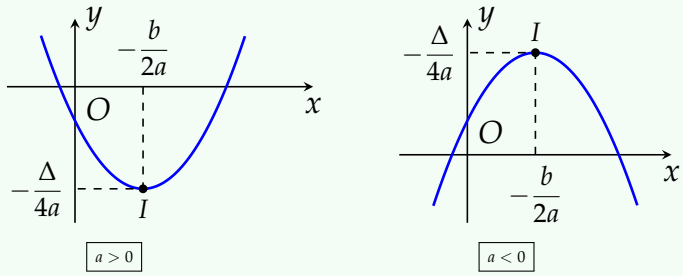
——HẾT——

§5. ĐỒ THỊ CÁC HÀM SỐ THƯỜNG GẶP

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$

Hình dạng đồ thị hàm số bậc hai



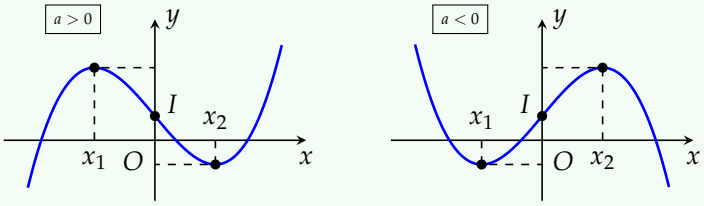
Ghi nhớ

① Tọa độ đỉnh:
$$I(x_0; y_0) = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right).$$
② (P) viết theo tọa độ đỉnh:
$$y = a(x - x_0)^2 + y_0$$

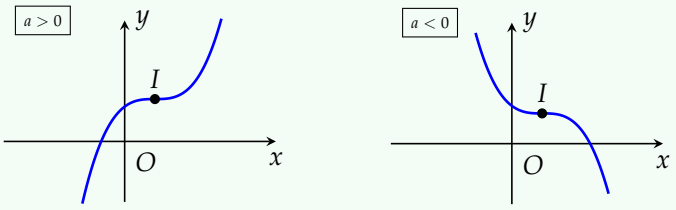
2. Hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Hình dạng đồ thị hàm số bậc ba

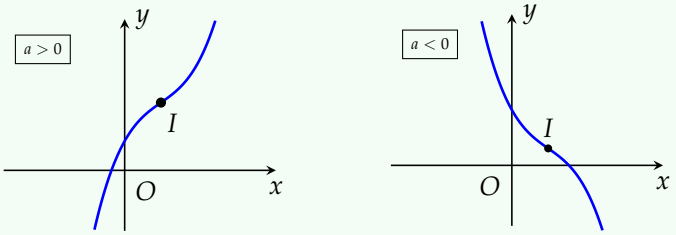
☑ **TH1.** $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2. Khi đó, hàm số có hai điểm cực trị $x = x_1$ và $x = x_2$.



☑ **TH2.** $y' = 0$ có nghiệm kép x_0. Khi đó, hàm số không có cực trị.



☑ **TH3.** $y' = 0$ vô nghiệm. Khi đó, hàm số không có cực trị.



Ghi nhớ

① Hàm số có hai điểm cực trị
$$\begin{cases} a \neq 0 \\ b^2 - 3ac > 0. \end{cases}$$

② Liên hệ tổng tích hai nghiệm
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{2b}{3a} \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{3a} \end{cases}$$

③ Hàm số không có điểm cực trị
$$b^2 - 3ac \leq 0 \text{ hoặc } \begin{cases} a = 0 \\ b = 0. \end{cases}$$

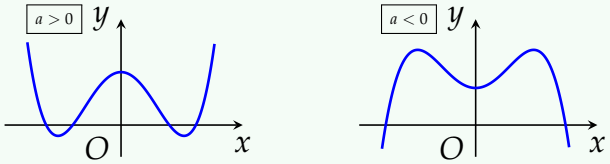
④ Hoành độ điểm uốn là nghiệm phương trình $y'' = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{b}{3a}$. Tọa độ điểm uốn là tâm đối xứng của đồ thị.

⑤ Tiếp tuyến tại điểm uốn $I(x_0; y_0)$ sẽ có hệ số góc nhỏ nhất nếu $a > 0$ và lớn nhất nếu $a < 0$.

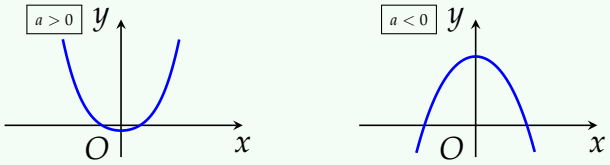
3. Hàm số bậc bốn trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$

Hình dạng đồ thị hàm số bậc bốn trùng phương

☑ $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt. Khi đó, hàm số có ba điểm cực trị $x = 0$ và $x = \pm\sqrt{-\frac{b}{2a}}$.



☑ $y' = 0$ có đúng 1 nghiệm $x = 0$. Khi đó, hàm số có đúng 1 điểm cực trị.



Ghi nhớ

① Hàm số có ba điểm cực trị

$$ab < 0$$

② Hàm số có đúng một điểm cực trị

$$\begin{cases} ab \geq 0 \\ a, b \text{ không đồng thời bằng } 0 \end{cases}.$$

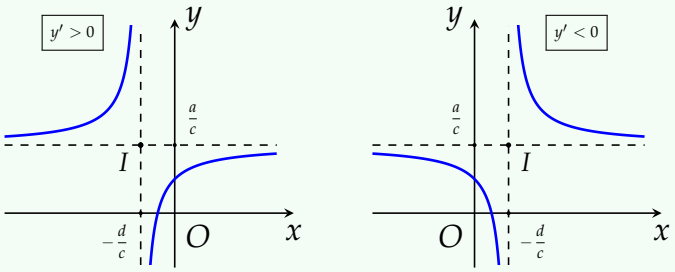
③ Hàm số chẵn, đối xứng nhau qua Oy.

4. Hàm nhất biến $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$

Hình dạng đồ thị hàm số Hàm nhất biến $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$

☑ Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$

☑ Hình dạng đồ thị:



Ghi nhớ

① Tiệm cận đứng $x = -\dfrac{d}{c}$.

② Tiệm cận ngang $y = \dfrac{a}{c}$.

③ Giao với Ox: $y = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{b}{a}$.

④ Giao với Oy: $x = 0 \Rightarrow y = \dfrac{b}{d}$.

⑤ Giao hai đường tiệm cận (điểm I) là tâm đối xứng của đồ thị.

B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1 Nhận dạng đồ thị hàm bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

☑ Nhìn "dáng điệu" của đồ thị:

① Bên phải đi lên thì $a > 0$. ② Bên phải đi xuống thì $a < 0$.

☑ Nhìn điểm thuộc đồ thị: Thay toạ độ đó vào hàm số phải thoả mãn. Đồ thị qua điểm $(0; d)$.

☑ Nhìn cực trị:

① Đồ thị hàm số có điểm cực đại (cực tiểu) là $(x_0;y_0)$ thì $\begin{cases} y'(x_0)=0 \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$.

② Mối liên hệ giữa hai điểm cực trị x_1 và x_2 của hàm số: $x_1+x_2=-\dfrac{2b}{3a}$ và $x_1x_2=\dfrac{c}{3a}$.

Ví dụ 1

Bảng biến thiên ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

(A) $y=-x^3-2x^2+5$. (B) $y=x^3-3x^2+5$.
(C) $y=-x^3-3x+5$. (D) $y=x^3+3x^2+5$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	5	↘	1	↗	$+\infty$

Ví dụ 2

Bảng biến thiên ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

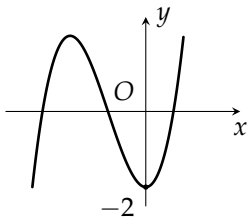
(A) $y=x^3-3x^2+x+3$. (B) $y=x^3-3x+4$.
(C) $y=x^3-3x^2+3x+1$. (D) $y=x^3+3x^2+5$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	2	↗	$+\infty$

Ví dụ 3

Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số đã cho sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

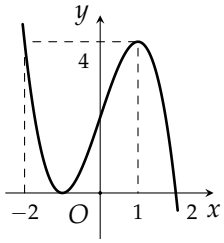
(A) $y=-x^3+x^2-2$. (B) $y=x^3+3x^2-2$.
(C) $y=x^3-3x+2$. (D) $y=x^2-3x-2$.



Ví dụ 4

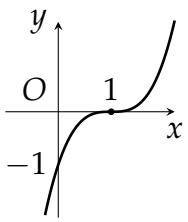
Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số đã cho sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

(A) $y=x^3+3x-2$. (B) $y=x^3-3x+2$.
(C) $y=-x^3+3x+2$. (D) $y=-x^3-3x-2$.



Ví dụ 5

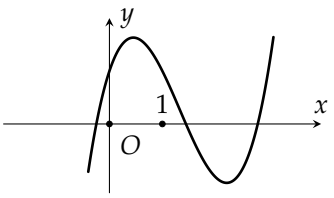
Cho hàm số đa thức bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị (C) như hình vẽ. Hỏi (C) là đồ thị của hàm số nào?



(A) $y = x^3 - 1$.
(B) $y = (x+1)^3$.
(C) $y = (x-1)^3$.
(D) $y = x^3 + 1$.

Ví dụ 6

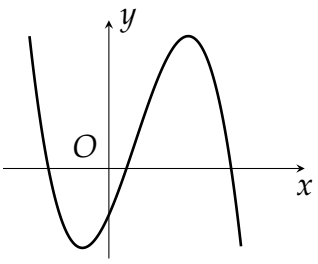
Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?



(A) $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$.
(B) $a < 0, b < 0, c > 0, d > 0$.
(C) $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.
(D) $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$.

Ví dụ 7

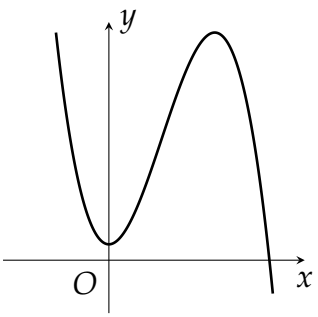
Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?



(A) $a < 0, b < 0, c < 0, d > 0$.
(B) $a < 0, b > 0, c < 0, d > 0$.
(C) $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$.
(D) $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$.

Ví dụ 8

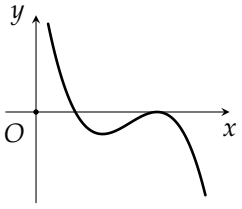
Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

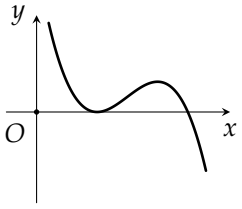


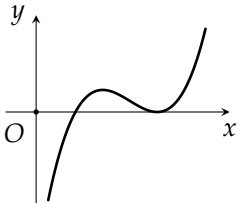
(A) $a < 0, b > 0, c > 0, d > 0$.
(B) $a < 0, b < 0, c = 0, d > 0$.
(C) $a < 0, b > 0, c = 0, d > 0$.
(D) $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$.

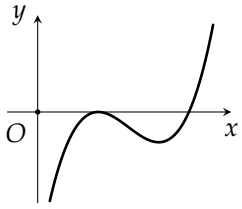
Ví dụ 9

Tìm đồ thị hàm số $y = f(x)$ được cho bởi một trong các phương án dưới đây, biết $f(x) = (a-x)(b-x)^2$ với $a < b$.

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

Dạng 2 Nhận dạng đồ thị hàm bậc bốn trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$

☑ Nhìn "dáng điệu" của đồ thị:

① Bên phải đi lên thì $a > 0$. ② Bên phải đi xuống thì $a < 0$.

☑ Nhìn điểm thuộc đồ thị: Thay toạ độ đó vào hàm số phải thoả mãn. Đồ thị qua điểm $(0; c)$.

☑ Nhìn điểm cực trị

① Đồ thị có 3 điểm cực trị $ab < 0$ ② Đồ thị có một điểm cực trị $ab > 0$.

Ví dụ 1

Bảng biến thiên ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

(A) $y = x^4 - 8x^2 + 2$.
(B) $y = x^4 + 6x^2 + 2$.
(C) $y = x^4 - 6x^2 + 2$.
(D) $y = -x^4 + 8x^2 + 2$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↘	-7	↗	2	↘	-7	↗	$-\infty$

Ví dụ 2

Bảng biến thiên ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

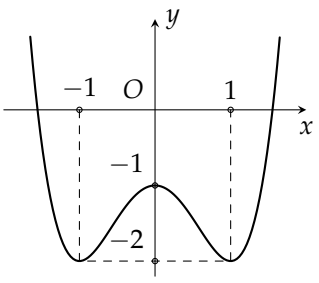
(A) $y = -x^4 + 3x^2 + 2$. (B) $y = -x^4 - 2x^2 + 1$.
(C) $y = -x^4 - 3x^2 + 2$. (D) $y = -x^4 + x^2 + 2$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	$-\infty$

Ví dụ 3

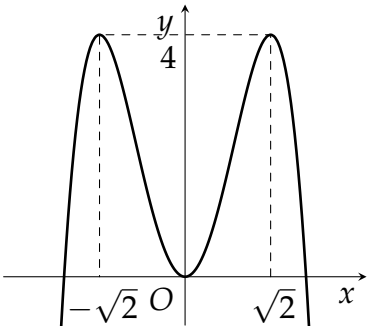
Đồ thị ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

(A) $y = x^4 - 2x^2 - 1$. (B) $y = 2x^4 - 4x^2 - 1$.
(C) $y = -x^4 + 2x^2 - 1$. (D) $y = -2x^4 + 4x^2 - 1$.



Ví dụ 4

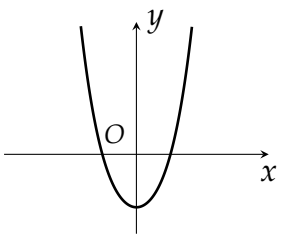
Đồ thị ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?



(A) $y=-x^4+4x^2$.
(B) $y=x^4-3x^2$.
(C) $y=-x^4-2x^2$.
(D) $y=-\frac{1}{4}x^4+3x^2$.

Ví dụ 5

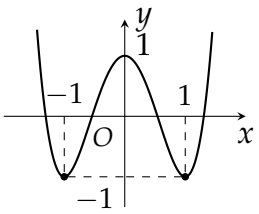
Đồ thị ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?



(A) $y=x^2-1$.
(B) $y=x^4-2x^2-1$.
(C) $y=x^4+2x^2-1$.
(D) $y=\frac{1}{4}x^4-3x^2-1$.

Ví dụ 6

Biết rằng hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị là đường cong hình vẽ bên. Tính giá trị $f(a+b+c)$.



(A) $f(a+b+c)=-1$.
(B) $f(a+b+c)=2$.
(C) $f(a+b+c)=-2$.
(D) $f(a+b+c)=1$.

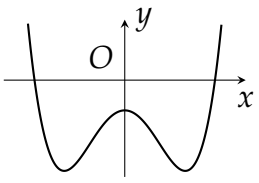
Ví dụ 7

Biết đồ thị hàm số $y=x^4+bx^2+c$ chỉ có một điểm cực trị là điểm có tọa độ $(0;-1)$, khi đó b và c thỏa mãn những điều kiện nào dưới đây?

(A) $b<0$ và $c=-1$.
(B) $b\geq 0$ và $c>0$.
(C) $b<0$ và $c<0$.
(D) $b\geq 0$ và $c=-1$.

Ví dụ 8

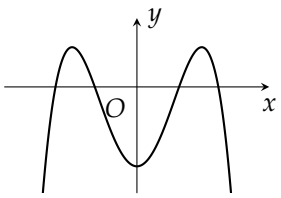
Đường cong trong hình bên là đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ với a,b,c là các tham số thực. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?



(A) $a<0, b>0, c<0$.
(B) $a<0, b<0, c<0$.
(C) $a>0, b<0, c<0$.
(D) $a>0, b<0, c>0$.

Ví dụ 9

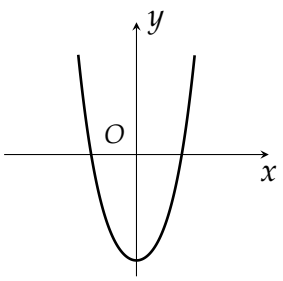
Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



(A) $a < 0, b > 0, c > 0$.
(B) $a < 0, b < 0, c < 0$.
(C) $a < 0, b > 0, c < 0$.
(D) $a < 0, b < 0, c > 0$.

Ví dụ 10

Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



(A) $a < 0, b > 0, c > 0$.
(B) $a > 0, b > 0, c > 0$.
(C) $a > 0, b < 0, c > 0$.
(D) $a > 0, b > 0, c < 0$.

Dạng 3 Nhận dạng đồ thị hàm nhất biến $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

Chú ý bốn thông số

① Tiệm cận đứng $x = -\dfrac{d}{c}$.
② Tiệm cận ngang $y = \dfrac{a}{c}$.
③ Giao với Ox: $y = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{b}{a}$.
④ Giao với Oy: $x = 0 \Rightarrow y = \dfrac{b}{d}$.

Ví dụ 1

Bảng biến thiên ở hình bên là của hàm số nào?

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	1	↘	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↘	1

(A) $y = \dfrac{2x-1}{x+3}$.
(B) $y = \dfrac{4x-6}{x-2}$.
(C) $y = \dfrac{3-x}{2-x}$.
(D) $y = \dfrac{x+5}{x-2}$.

Ví dụ 2

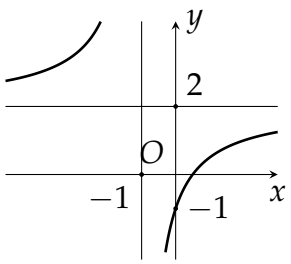
Bảng biến thiên sau là của hàm số nào trong các hàm số bên dưới?

x	$-\infty$		3		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	
y	-1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-1

(A) $y = \dfrac{x-1}{x-3}$.
(B) $y = \dfrac{x-1}{-x-3}$.
(C) $y = \dfrac{x+5}{-x+3}$.
(D) $y = \dfrac{1}{x-3}$.

Ví dụ 3

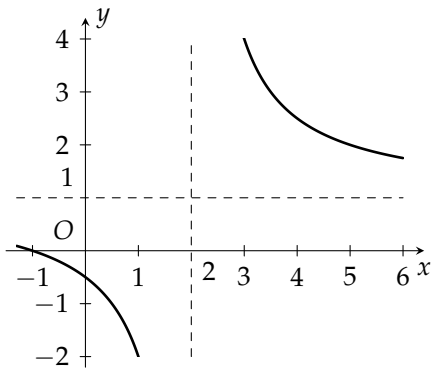
Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau?



(A) $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$.
(B) $y=\dfrac{1-2x}{x+1}$.
(C) $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$.
(D) $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$.

Ví dụ 4

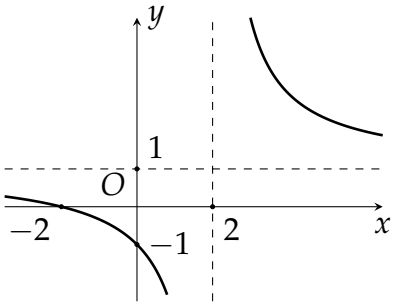
Cho hàm số $y=\dfrac{ax+1}{bx-2}$ có đồ thị như hình vẽ. Tính $T=a+b$



(A) $T=2$.
(B) $T=0$.
(C) $T=-1$.
(D) $T=3$.

Ví dụ 5

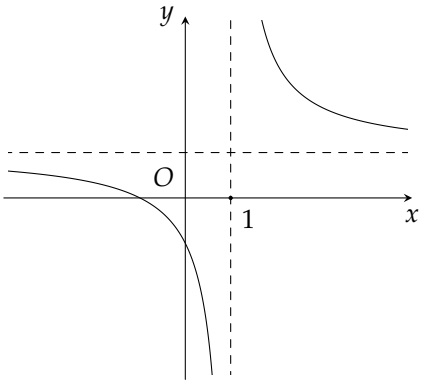
Hãy xác định a, b để hàm số $y=\dfrac{2-ax}{x+b}$ có đồ thị như hình vẽ?



(A) $a=1;b=-2$.
(B) $a=b=2$.
(C) $a=-1;b=-2$.
(D) $a=b=-2$.

Ví dụ 6

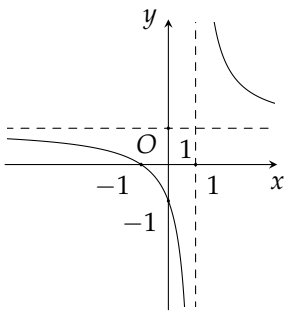
Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



(A) $y'>0,\forall x\in\mathbb{R}$.
(B) $y'<0,\forall x\in\mathbb{R}$.
(C) $y'>0,\forall x\neq 1$.
(D) $y'<0,\forall x\neq 1$.

Ví dụ 7

Đồ thị hình vẽ là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



(A) $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$.

(B) $y=\dfrac{x+1}{x-1}$.

(C) $y=x^4+x^2+1$.

(D) $y=x^3-3x-1$.

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BẢNG TÔ ĐÁP ÁN TỰ LUYỆN

Học sinh làm BTTL xong, tô phương án đúng. Buổi học sau, cùng với GV kiểm tra kết quả.

1	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	7	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	13	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	19	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	25	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
2	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	8	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	14	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	20	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	26	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
3	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	9	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	15	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	21	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	27	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
4	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	10	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	16	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	22	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	28	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
5	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	11	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	17	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	23	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	29	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
6	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	12	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	18	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	24	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	30	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

Câu 1

Đồ thị hàm số nào dưới đây **không** đi qua điểm $A(1;1)$?

Ⓐ $y=x$. Ⓑ $y=2x^2-1$. Ⓒ $y=2x^3-x-1$. Ⓓ $y=-x^4+2$.

Câu 2

Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-2}$ có đồ thị (C). Đồ thị (C) đi qua điểm nào?

Ⓐ $M(1;3)$. Ⓑ $M(0;-2)$. Ⓒ $M\left(-1;\dfrac{1}{3}\right)$. Ⓓ $M(3;5)$.

Câu 3

Bảng biến thiên ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau dây. Hỏi đó là hàm số nào?

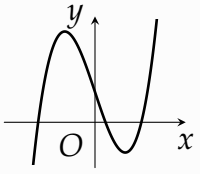
Ⓐ $y=-x^3-3x-2$.
Ⓑ $y=x^3-3x^2-1$.
Ⓒ $y=x^3+3x^2-1$.
Ⓓ $y=-x^3+3x^2-1$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-1	↘	-5	↗	$+\infty$

Câu 4

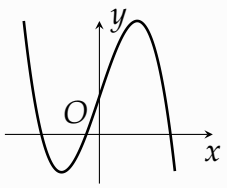
Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào dưới đây?

Ⓐ $y=-x^3+3x+1$. Ⓑ $y=x^3+3x+1$.
Ⓒ $y=-x^3-3x+1$. Ⓓ $y=x^3-3x+1$.



Câu 5

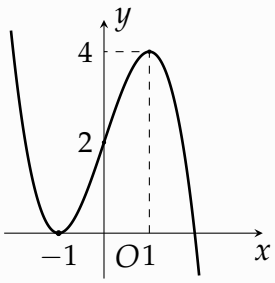
Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào dưới đây?



(A) $y = x^3 + 3x^2 - 3x + 1$.
(B) $y = -x^3 - 2x^2 + x - 2$.
(C) $y = -x^3 + 3x + 1$.
(D) $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$.

Câu 6

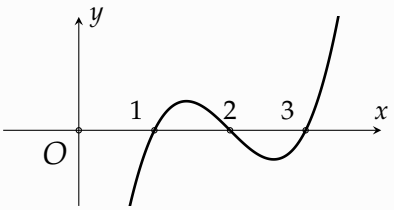
Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào dưới đây?



(A) $y = (x+1)^2(1+x)$.
(B) $y = (x+1)^2(1-x)$.
(C) $y = (x+1)^2(2-x)$.
(D) $y = (x+1)^2(2+x)$.

Câu 7

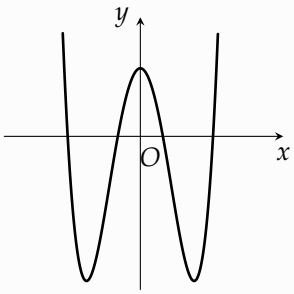
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?



(A) $f(1{,}5) < 0, f(2{,}5) < 0$.
(B) $f(1{,}5) > 0 > f(2{,}5)$.
(C) $f(1{,}5) > 0, f(2{,}5) > 0$.
(D) $f(1{,}5) < 0 < f(2{,}5)$.

Câu 8

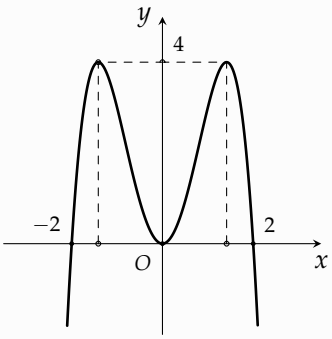
Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?



(A) $y = x^4 + 5x^2 + 2$.
(B) $y = x^3 - 3x^2 + 2$.
(C) $y = x^4 - 5x^2 + 2$.
(D) $y = -x^4 + 5x^2 + 2$.

Câu 9

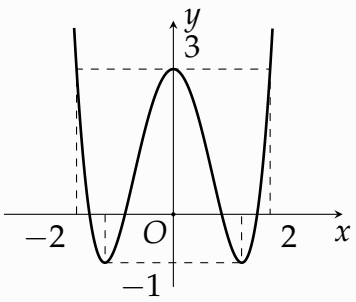
Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?



(A) $y = x^4 - 3x^2$.
(B) $y = -\frac{1}{4}x^4 + 3x^2$.
(C) $y = -x^4 - 2x^2$.
(D) $y = -x^4 + 4x^2$.

Câu 10

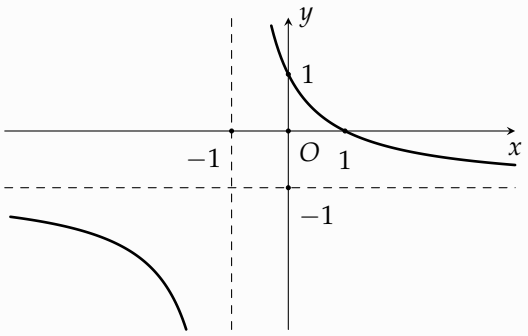
Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?



(A) $y=-x^4+4x^2+3$.
(B) $y=-x^4+2x^2+3$.
(C) $y=(x^2-2)^2-1$.
(D) $y=(x^2+2)^2-1$.

Câu 11

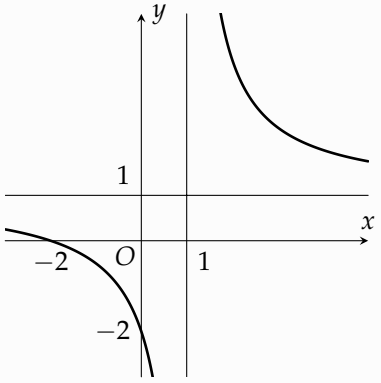
Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?



(A) $y=\dfrac{-2x+1}{2x+1}$.
(B) $y=\dfrac{-x+1}{x+1}$.
(C) $y=\dfrac{-x+2}{x+1}$.
(D) $y=\dfrac{-x}{x+1}$.

Câu 12

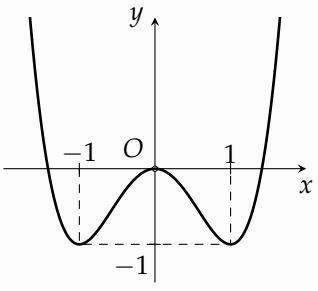
Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?



(A) $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$.
(B) $y=\dfrac{x+2}{1-x}$.
(C) $y=\dfrac{x+2}{x-1}$.
(D) $y=\dfrac{x+1}{x-1}$.

Câu 13

Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?



(A) $y=x^4-2x^2$.
(B) $y=x^4-2x^2-3$.
(C) $y=-x^4+2x^2$.
(D) $y=-x^4+2x^2-3$.

Câu 14

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		$-$	‖	$+$	0	$-$	
y	5	↘	-2	↗	4	↘	-1

Khẳng định nào sau đây **sai**?

(A) Hàm số không có giá trị lớn nhất và có giá trị nhỏ nhất bằng -2.

(B) Hàm số có hai điểm cực trị.

(C) Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang.

(D) Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 5 và giá trị nhỏ nhất bằng -2.

Câu 15

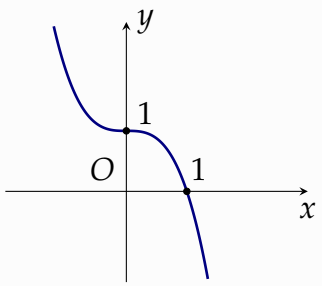
Đường cong ở hình bên là đồ thị một trong bốn hàm số cho ở phương án A, B, C, D. Hỏi đó là hàm số nào?

(A) $y = -x^3 + 1$.

(B) $y = -2x^3 + x^2$.

(C) $y = 3x^2 + 1$.

(D) $y = -4x^3 + 1$.



Câu 16

Hàm số nào trong bốn hàm số dưới đây có bảng biến thiên như hình bên?

(A) $y = \dfrac{2x-3}{x+2}$.

(B) $y = \dfrac{x+4}{x-2}$.

(C) $y = \dfrac{2x+3}{x-2}$.

(D) $y = \dfrac{2x-7}{x-2}$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	2	↘	$-\infty$	↘	2

Câu 17

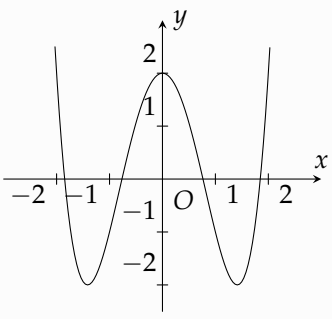
Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

(A) $a > 0, b < 0, c > 0$.

(B) $a > 0, b < 0, c < 0$.

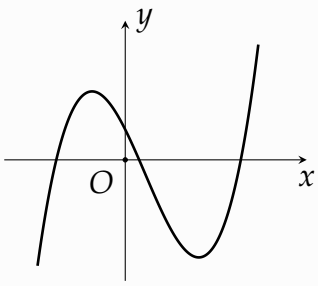
(C) $a > 0, b > 0, c > 0$.

(D) $a < 0, b > 0, c > 0$.



Câu 18

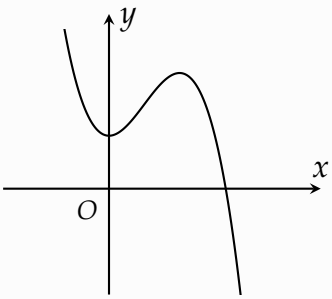
Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?



(A) $a > 0, b < 0, c > 0, d < 0$.
(B) $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.
(C) $a < 0, b < 0, c < 0, d > 0$.
(D) $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

Câu 19

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây, điểm cực tiểu của đồ thị nằm trên trục tung. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



(A) $a < 0, b < 0, c = 0, d > 0$.
(B) $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$.
(C) $a < 0, b > 0, c > 0, d > 0$.
(D) $a < 0, b > 0, c = 0, d > 0$.

Câu 20

Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a \neq 0$. Biết đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $A(1;-1)$, $B(-1;3)$. Tính $f(4)$.

(A) $f(4) = 53$.
(B) $f(4) = -17$.
(C) $f(4) = -53$.
(D) $f(4) = 17$.

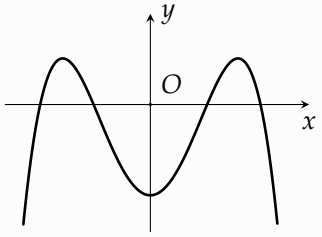
Câu 21

Cho $A\,(0;-3)$ là điểm cực đại và $B\,(-1;-5)$ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$. Tính giá trị của hàm số tại $x = -2$.

(A) $y\,(-2) = 43$.
(B) $y\,(-2) = 23$.
(C) $y\,(-2) = 19$.
(D) $y\,(-2) = 13$.

Câu 22

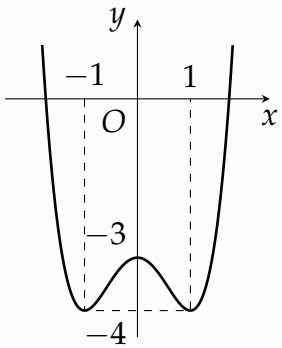
Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



(A) $a > 0,\ b < 0,\ c < 0$.
(B) $a < 0,\ b < 0,\ c < 0$.
(C) $a < 0,\ b > 0,\ c < 0$.
(D) $a > 0,\ b < 0,\ c > 0$.

Câu 23

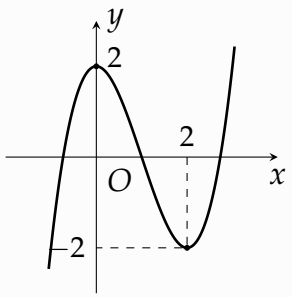
Xác định các hệ số a, b, c để hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên.



(A) $a = -\dfrac{1}{4}, b = 3, c = -3$.
(B) $a = 1, b = -2, c = -3$.
(C) $a = 1, b = -3, c = 3$.
(D) $a = 1, b = 3, c = -3$.

Câu 24

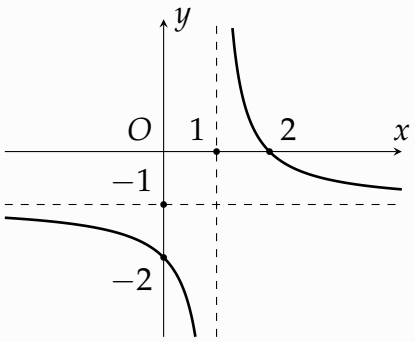
Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị là đường cong như hình bên. Tính tổng $S = a + b + c + d$.



(A) $S = 0$.
(B) $S = 6$.
(C) $S = -4$.
(D) $S = 2$.

Câu 25

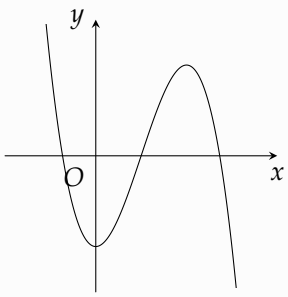
Cho hàm số $y = \dfrac{ax + b}{x + c}$ có đồ thị như hình vẽ, với a, b, c là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức $T = a - 3b + 2c$.



(A) $T = 12$.
(B) $T = -7$.
(C) $T = 10$.
(D) $T = -9$.

Câu 26

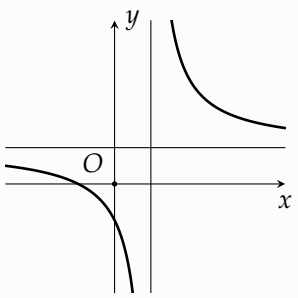
Đồ thị hình vẽ là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



(A) $y = -x^3 - x - 2$.
(B) $y = -x^4 + x^2 - 2$.
(C) $y = -x^3 + 3x^2 - 2$.
(D) $y = x^3 - 3x^2 - 2$.

Câu 27

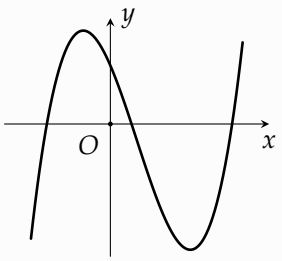
Cho hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?



(A) $ac > 0, bd > 0, cd > 0$.
(B) $ad < 0, bc > 0, cd > 0$.
(C) $ab > 0, bc > 0, bd < 0$.
(D) $bc > 0, ad < 0, ac < 0$.

Câu 28

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?



(A) $ab < 0, bc > 0, cd < 0$.
(B) $ab > 0, bc > 0, cd < 0$.
(C) $ab < 0, bc < 0, cd > 0$.
(D) $ab < 0, bc > 0, cd > 0$.

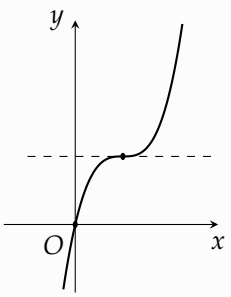
Câu 29

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đạt cực trị tại các điểm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 \in (-1;0)$, $x_2 \in (1;2)$. Biết hàm số đồng biến trên khoảng $(x_1;x_2)$. Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

(A) $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$.
(B) $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$.
(C) $a > 0, b > 0, c > 0, d < 0$.
(D) $a < 0, b > 0, c < 0, d < 0$.

Câu 30

Cho hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a^2 + c^2 + b + 2d + 1$.



(A) $\dfrac{1}{5}$.
(B) 1.
(C) $\dfrac{5}{8}$.
(D) $\dfrac{1}{3}$.

——HẾT——

§6. ỨNG DỤNG ĐỒ THỊ ĐỂ BIỆN LUẬN NGHIỆM PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH.

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Ứng dụng đồ thị để biện luận nghiệm phương trình.

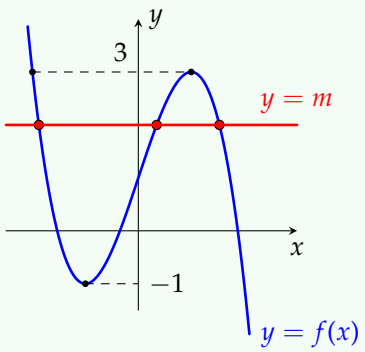
Dùng đồ thị để biện luận nghiệm

☑ Xét phương trình $f(x) = m$, với m là tham số. Nghiệm của phương trình này có thể coi là hoành độ giao điểm của đồ thị $y = f(x)$ (cố định) với đường thẳng $y = m$ (nằm ngang).

☑ Từ đó, để biện luận nghiệm phương trình $f(x) = m$, ta có thể thực hiện các bước như sau:

① Lập bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trên miền xác định mà đề bài yêu cầu.

② Tịnh tiến đường thẳng $y = m$ theo hướng "*lên, xuống*". Quan sát số giao điểm để quy ra số nghiệm tương ứng.



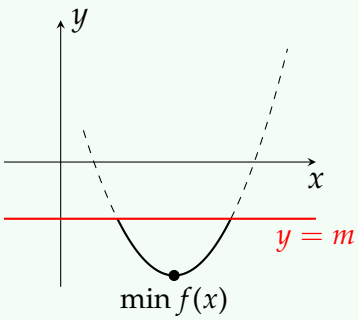
2. Ứng dụng đồ thị để biện luận nghiệm bất phương trình.

Ứng dụng đồ thị để biện luận nghiệm bất phương trình.

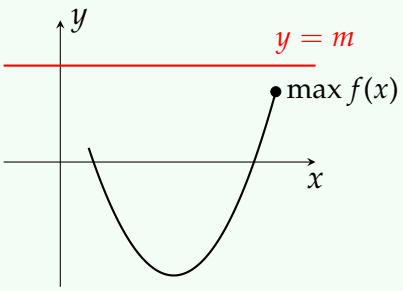
☑ Xét bất phương trình ở dạng $f(x) < m$ (1), với m là tham số.

① **Bài toán 1.** Tìm điều kiện của tham số m để (1) có nghiệm trên miền $\mathscr{D}$: Khi đó, ta tìm điều kiện để đồ thị $y = f(x)$ có phần nằm dưới đường thẳng $y = m$.

② **Bài toán 2.** Tìm điều kiện của tham số m để (1) nghiệm đúng với mọi x thuộc miền $\mathscr{D}$: Khi đó, ta tìm điều kiện để đồ thị $y = f(x)$ nằm hoàn toàn phía dưới đường thẳng $y = m$.



Minh họa Bài toán 1



Minh họa Bài toán 2

☑ Các bài toán tương tự:

① $f(x) > m$ nghiệm đúng $\forall x \in \mathscr{D}$.

② $f(x) > m$ có nghiệm trên miền $\mathscr{D}$.

③ $f(x) \leq m$ nghiệm đúng $\forall x \in \mathscr{D}$.

④ $f(x) \leq m$ có nghiệm trên miền $\mathscr{D}$.

⑤ $f(x) \geq m$ nghiệm đúng $\forall x \in \mathscr{D}$.

⑥ $f(x) \geq m$ có nghiệm trên miền $\mathscr{D}$.

⚠ *Khi muốn sử dụng phương pháp đồ thị để biện luận nghiệm của phương trình $f(x,m)=0$ hoặc bất phương trình $f(x,m)>0$, $f(x,m)<0$, ta phải thực hiện "cô lập" tham số m.*

B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

BUỔI HỌC SỐ 1

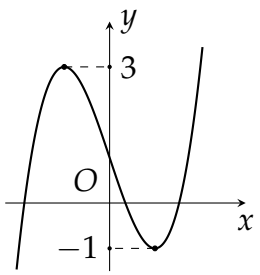
Dạng 1 Giải, biện luận nghiệm phương trình bằng phương pháp đồ thị

- Chuyển phương trình đã cho về dạng $f(x)=m$;
- Tịnh tiến đường thẳng $y=m$ lên xuống theo phương ngang. Nhìn giao điểm với đồ thị $y=f(x)$ để quy ra số nghiệm tương ứng.

Ví dụ 1

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình $2f(x)-3=0$ là

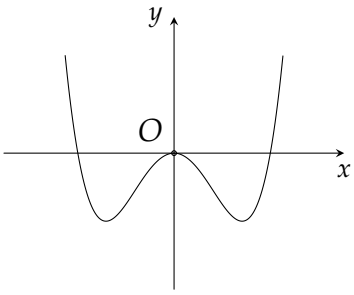
(A) 2. (B) 1.
(C) 0. (D) 3.



Ví dụ 2

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục hoành tại bao nhiêu điểm?

(A) 4. (B) 2. (C) 1. (D) 3.



Ví dụ 3

Đồ thị hàm số $y=x^4-x^3-3$ cắt trục tung tại mấy điểm?

(A) 1 điểm. (B) 2 điểm. (C) 4 điểm. (D) 3 điểm.

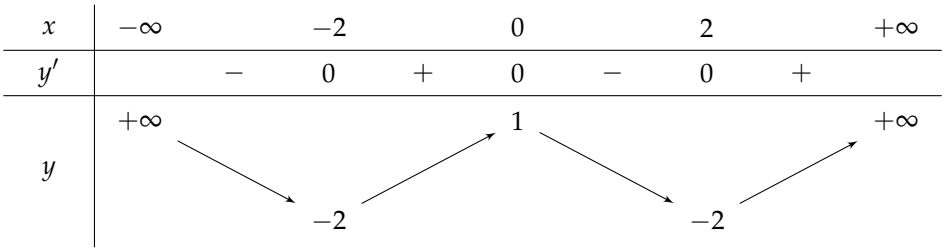
Ví dụ 4

Tìm tập hợp gồm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị (C) của hàm số $y=x^3-3x+m$ cắt trục hoành tại đúng 3 điểm phân biệt.

(A) $(-2;2)$. (B) $(2;+\infty)$. (C) $(-\infty;-2)$. (D) $\mathbb{R}$.

Ví dụ 5

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

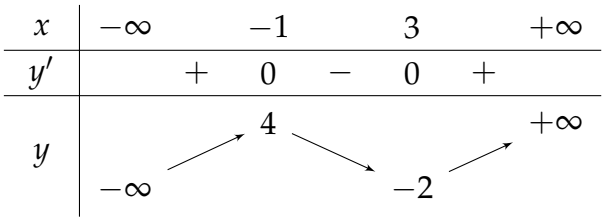


Số nghiệm của phương trình $2f(x) + 3 = 0$ là

(A) 4. (B) 3. (C) 2. (D) 1.

Ví dụ 6

Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên.

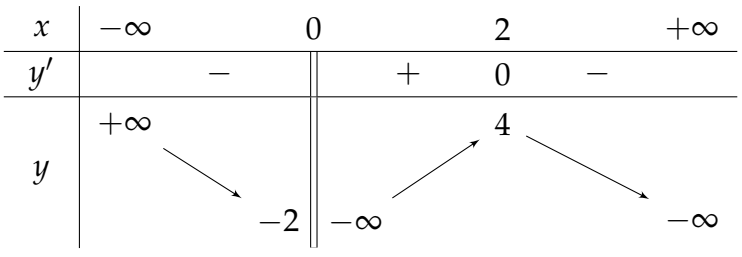


Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) = m + 1$ có ba nghiệm thực phân biệt.

(A) $-3 \le m \le 3$. (B) $-2 \le m \le 4$. (C) $-2 < m < 4$. (D) $-3 < m < 3$.

Ví dụ 7

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên sau.

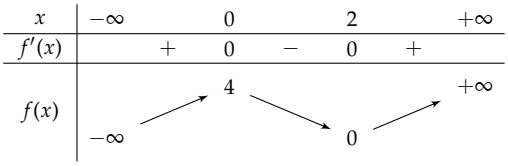


Tìm tập hợp tất các cả thực của tham số m sao cho phương trình $f(x) = m$ có ba nghiệm thực phân biệt.

(A) $(-\infty; 4]$. (B) $[-2; 4]$. (C) $(-2; 4)$. (D) $(-2; 4]$.

Ví dụ 8

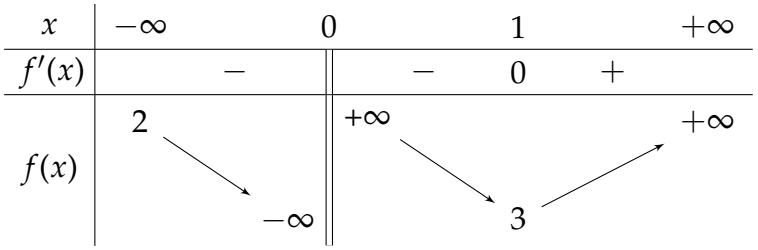
Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.
Số nghiệm của phương trình $3f(x) - \mathrm{e} = 0$ là



(A) 4. (B) 2. (C) 3. (D) 1.

Ví dụ 9

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và có bảng biến thiên như hình bên.

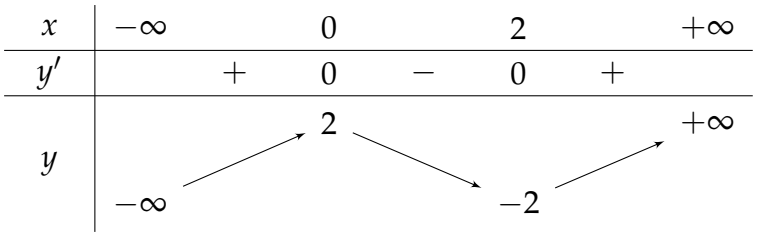


Hỏi phương trình $3|f(x)| - 10 = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

(A) 2 nghiệm. (B) 4 nghiệm. (C) 3 nghiệm. (D) 1 nghiệm.

Ví dụ 10

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau.

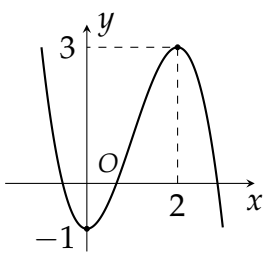


Hỏi phương trình $f\left(|x|\right) = 1$ có mấy nghiệm?

(A) 6 nghiệm. (B) 2 nghiệm. (C) 3 nghiệm. (D) 4 nghiệm.

Ví dụ 11

Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d\,(a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $2f\left(|x|\right) - m = 0$ có đúng 4 nghiệm phân biệt.



(A) $1 < m < 3$. (B) $-1 < m < 3$.
(C) $-2 < m < 6$. (D) $2 < m < 6$.

Ví dụ 12

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	1	↗	3	↘	$\frac{1}{3}$	↗	1

Số nghiệm của phương trình $2[f(x)]^2 - 3f(x) + 1 = 0$ là

(A) 2. (B) 3. (C) 6. (D) 0.

Ví dụ 13

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $-x^4 + 2x^2 + 3 + 2m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

(A) $-2 \leqslant m \leqslant \frac{-3}{2}$. (B) $\frac{-3}{2} < m < 2$. (C) $-2 < m < \frac{-3}{2}$. (D) $3 < m < 4$.

Ví dụ 14

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + mx + 1$ có hai điểm cực trị đều thuộc khoảng $(-1;4)$?

(A) 4. (B) 9. (C) 8. (D) 3.

Ví dụ 15

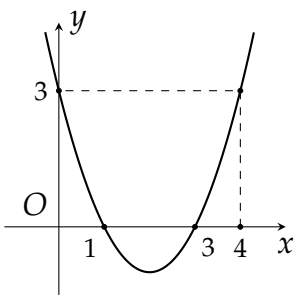
Cho phương trình $\sin^3 x - 3\sin^2 x + 2 - m = 0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình có nghiệm?

(A) 3. (B) 1. (C) 5. (D) 4.

Dạng 2 Giải, biện luận nghiệm bất phương trình bằng phương pháp đồ thị

Ví dụ 1

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $f(x) \le 3$ là



(A) 3. (B) 5 . (C) 6. (D) 2.

Ví dụ 2

Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (2m-1)x + 2019$ đồng biến trên $(2; +\infty)$.

(A) $m < \frac{1}{2}$. (B) $m = \frac{1}{2}$. (C) $m \ge 0$. (D) $m \ge \frac{1}{2}$.

Ví dụ 3

Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y = x^3 + mx - \frac{1}{5x^5}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$?

(A) 5. (B) 3. (C) 0. (D) 4.

Ví dụ 4

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $m\sqrt{x^2-2x+2} + m + 2x - x^2 \le 0$ có nghiệm $x \in [0; 1+\sqrt{3}]$.

(A) $m \le \frac{2}{3}$. (B) $m \le 0$. (C) $m \ge \frac{2}{3}$. (D) $m \le -1$.

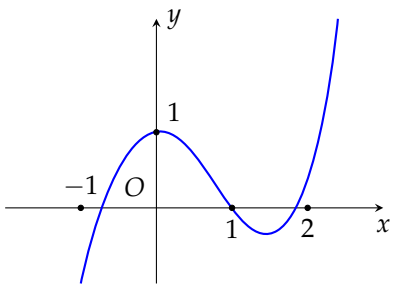
BUỔI HỌC SỐ 2

Dạng 3 Một số bài toán liên quan đến hàm hợp

Ví dụ 1

Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên . Khi đó phương trình $4f(3x^4) - 3 = 0$ có bao nhiêu nghiệm dương?

(A) 2. (B) 4.
(C) 5. (D) 1.



Ví dụ 2

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Phương trình $f(4x - x^2) - 2 = 0$ có bao nhiêu nghiệm thực?

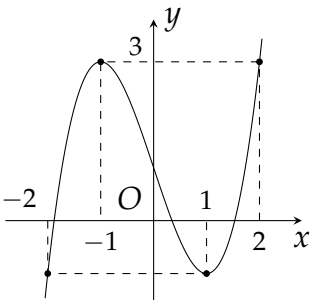
(A) 2. (B) 6. (C) 0. (D) 4.

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

Ví dụ 3

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(1 - \cos 2x) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$ là

(A) $[-1; 3]$. (B) $(-1; 1)$. (C) $(-1; 3)$. (D) $(-1; 1]$.



Ví dụ 4

Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

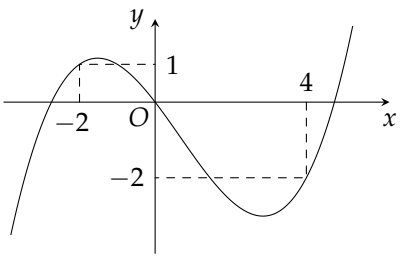
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	↘	-3	↗	2	↘	-1	↗	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(4x^2 + 4x)$ là

(A) 5. (B) 9. (C) 7. (D) 3.

Ví dụ 5

Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình bên dưới.



Hàm số $g(x)=f(1-2x)+x^2-x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

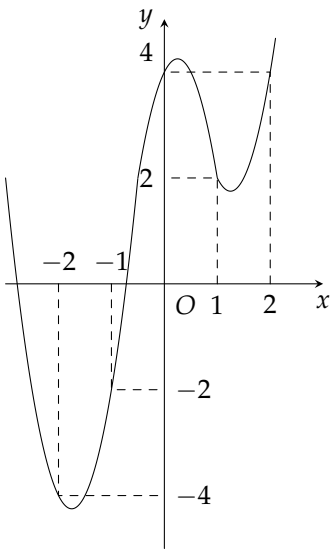
(A) $\left(1;\frac{3}{2}\right)$. (B) $\left(0;\frac{1}{2}\right)$. (C) $(-2;-1)$. (D) $(2;3)$.

Ví dụ 6

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)-x^2$ là

(A) 1. (B) 2.

(C) 3. (D) 4.



C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BẢNG TÔ ĐÁP ÁN TỰ LUYỆN

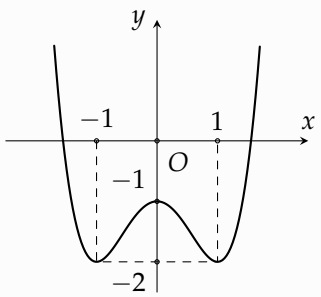
Học sinh làm BTTL xong, tô phương án đúng. Buổi học sau, cùng với GV kiểm tra kết quả.

1	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	7	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	13	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	19	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	25	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
2	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	8	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	14	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	20	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	26	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
3	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	9	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	15	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	21	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	27	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
4	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	10	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	16	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	22	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	28	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
5	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	11	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	17	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	23	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	29	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
6	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	12	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	18	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	24	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	30	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

Câu 1

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị ở hình bên. Số nghiệm dương phân biệt của phương trình $f(x) = -\sqrt{3}$ là

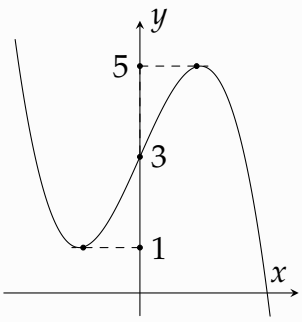
Ⓐ 1. Ⓑ 3.
Ⓒ 2. Ⓓ 4.



Câu 2

Hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Phương trình $2f(x) - 5 = 0$ có bao nhiêu nghiệm âm?

Ⓐ 0. Ⓑ 2.
Ⓒ 1. Ⓓ 3.



Câu 3

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình bên. Số phần tử tập nghiệm của phương trình $|f(x)| = 2$ là

Ⓐ 4. Ⓑ 3. Ⓒ 5. Ⓓ 6.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	‖	↗	2	↘	
			-1	$-\infty$			$-\infty$

Câu 4

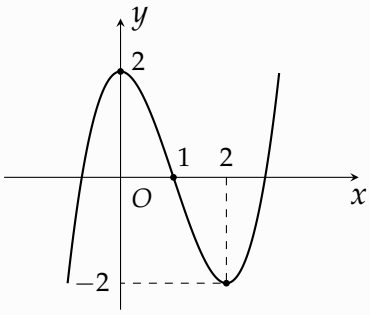
Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau. Số nghiệm của phương trình $f(x+5)-4=0$ là

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	4	↘	-2	↗	$+\infty$

(A) 0. (B) 2.
(C) 3. (D) 1.

Câu 5

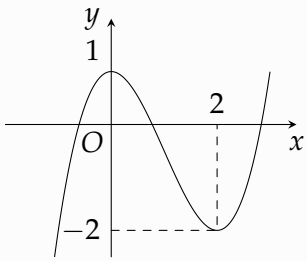
Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm số nghiệm của phương trình $f(x)=-x+1$.



(A) 2. (B) 4.
(C) 1. (D) 3.

Câu 6

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tìm số nghiệm của phương trình $2f(x^2)+3=0$.



(A) 4. (B) 2.
(C) 3. (D) 6.

Câu 7

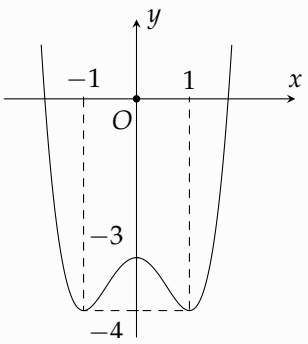
Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x)-1=m$ có đúng hai nghiệm.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-1	↗	0	↘	-1	↗	$+\infty$

(A) $\begin{cases} m=-2 \\ m>-1 \end{cases}$. (B) $-2<m<-1$.
(C) $\begin{cases} m>0 \\ m=-1 \end{cases}$. (D) $\begin{cases} m=-2 \\ m\geq -1 \end{cases}$.

Câu 8

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $4f(x) + m = 0$ có đúng 4 nghiệm thực phân biệt?



(A) 4. (B) 3.
(C) 2. (D) 0.

Câu 9

Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^3 - 3x^2 - m - 4 = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

(A) $4 < m < 8$. (B) $m < 0$. (C) $-8 < m < -4$. (D) $0 \le m \le 4$.

Câu 10

Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $2x^3 - 3x^2 = 2m + 1$ có đúng hai nghiệm phân biệt. Tổng các phần tử của S bằng

(A) $-\frac{1}{2}$. (B) $-\frac{3}{2}$. (C) $-\frac{5}{2}$. (D) $\frac{1}{2}$.

Câu 11

Tập tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^4 - 4x^2 + 3 + m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt là

(A) $(-1;3)$. (B) $(-3;1)$. (C) $(2;4)$. (D) $(-3;0)$.

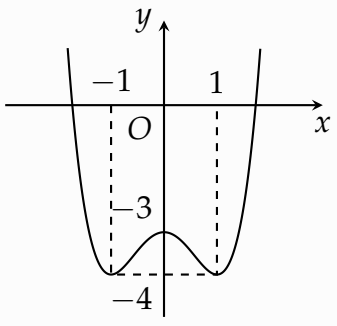
Câu 12

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = 2x^2|x^2 - 2|$ tại 6 điểm phân biệt?

(A) 1. (B) 0. (C) 2. (D) 3.

Câu 13

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $|f(x)| = m$ có 6 nghiệm phân biệt.



(A) $-4 < m < -3$. (B) $0 < m < 3$.
(C) $m > 4$. (D) $3 < m < 4$.

Câu 14

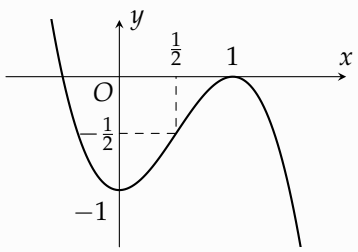
Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có bảng biến thiên như hình bên. Khi đó, phương trình $|f(x)|=m$ có bốn nghiệm phân biệt $x_1<x_2<x_3<\dfrac{1}{2}<x_4$ khi và chỉ khi

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	1	↘	0	↗	$+\infty$

(A) $\dfrac{1}{2}<m<1$.
(B) $\dfrac{1}{2}\le m<1$.
(C) $0<m<1$.
(D) $0<m\le 1$.

Câu 15

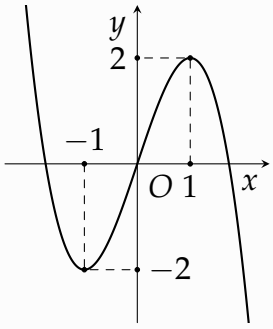
Cho hàm số $y=-2x^3+3x^2-1$ có đồ thị như hình vẽ. Bằng cách sử dụng đồ thị hàm số, xác định m để phương trình $2x^3-3x^2+2m=0$ có đúng ba nghiệm phân biệt, trong đó có hai nghiệm lớn hơn $\dfrac{1}{2}$.



(A) $m\in\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$.
(B) $m\in(-1;0)$.
(C) $m\in\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.
(D) $m\in\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{2}\right)$.

Câu 16

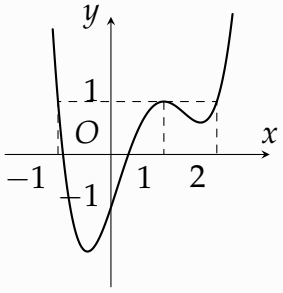
Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $f(x)\le 2^m$ có nghiệm đúng với mọi $x\in[0;1]$.



(A) $0\le m\le 2$.
(B) $m\ge 2$.
(C) $0\le m\le 1$.
(D) $m\ge 1$.

Câu 17

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm thực của phương trình $f(x^2+x)=1$ là



(A) 2.
(B) 3.
(C) 4.
(D) 5.

Câu 18

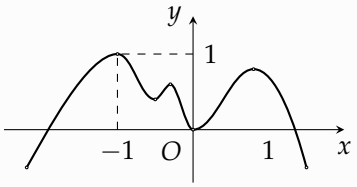
Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau. Số nghiệm của phương trình $f\left(\sqrt{2x-3}\right)+4=0$ là

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$		$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$	2	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$
	$-\infty$			$+\infty$			

(A) 4. (B) 3. (C) 2. (D) 1.

Câu 19

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm thực của phương trình $f(f(\sin 2x)) = 0$ trong khoảng $(0;\pi)$ là



(A) 4. (B) 3. (C) 2. (D) 1.

Câu 20

Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 - mx - 4$ luôn đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

(A) $m \le -3$. (B) $m < -3$. (C) $m \ge 3$. (D) $m > 3$.

Câu 21

Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 + (m-1)x + 4m$ đồng biến trên khoảng $(-1;1)$ là

(A) $m > 4$. (B) $m \ge 4$. (C) $m \le -8$. (D) $m < 8$.

Câu 22

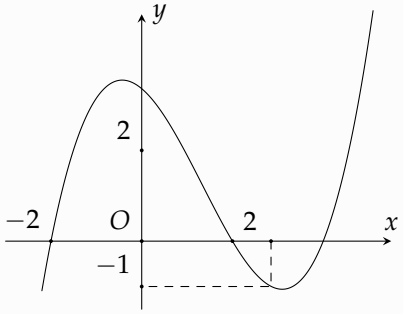
Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2+2x)$ là

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

(A) 3. (B) 9.
(C) 5. (D) 7.

Câu 23

Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $\left|f\left(x^3-3x\right)\right| = \dfrac{1}{2}$ là



(A) 6. (B) 10. (C) 12. (D) 3.

Câu 24

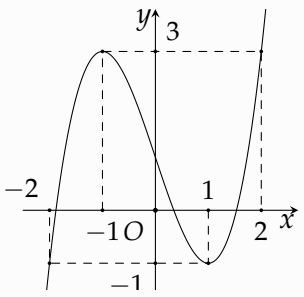
Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\frac{1}{3}\left|\cos^3 x\right| - 3\cos^2 x + 5\left|\cos x\right| - 3 + 2m = 0$ có đúng bốn nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[0;2\pi]$.

(A) $-\frac{3}{2} < m < -\frac{1}{3}$. (B) $\frac{1}{3} \le m < \frac{3}{2}$. (C) $\frac{1}{3} < m < \frac{3}{2}$. (D) $-\frac{3}{2} \le m \le -\frac{1}{3}$.

Câu 25

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(x) = f(m)$ có ba nghiệm phân biệt là

(A) 5. (B) 3. (C) 0. (D) 1.



Câu 26

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \sqrt{\sin^2 x - 4\cos x + 2m}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

(A) Không có m thỏa mãn. (B) $m \le -\frac{5}{2}$.

(C) $m \ge 2$. (D) $m \ge -\frac{5}{2}$.

Câu 27

Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $x + 1 = m\sqrt{2x^2 + 1}$ có hai nghiệm phân biệt.

(A) $-\frac{\sqrt{2}}{2} < m < \frac{\sqrt{6}}{6}$. (B) $m < \frac{\sqrt{2}}{2}$. (C) $m > \frac{\sqrt{6}}{6}$. (D) $\frac{\sqrt{2}}{2} < m < \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Câu 28

Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $x^4 + 1 - x^2 + x\sqrt{2mx^4 + 2m} \ge 0$ đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$. Biết rằng $S = [a;b]$. Giá trị của $a\sqrt{8} + 12b$ bằng

(A) 3. (B) 2. (C) 6. (D) 5.

Câu 29

Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = \frac{3}{4}x^4 - (m-1)x^2 - \frac{1}{4x^4}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

Câu 30

Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi;2\pi]$ của phương trình $2f(\sin x)+3=0$ là

(A) 4. (B) 3. (C) 6. (D) 8.

—-HẾT—-

§7. SỰ TƯƠNG GIAO CỦA HAI ĐỒ THỊ

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Phương pháp đại số

Định nghĩa 7.1. Xác định tọa độ giao điểm của hai đồ thị $y = f(x)$ và $y = g(x)$, ta thực hiện các bước:

① Giải phương trình hoành độ giao điểm $\boxed{f(x) = g(x)}$. Tìm các nghiệm $x_0 \in \mathscr{D}_f \cap \mathscr{D}_g$.

② Với x_0 vừa tìm, thay vào 1 trong 2 hàm số ban đầu để tìm y_0.

③ Kết luận giao điểm $(x_0; y_0)$.

2. Phương pháp đồ thị

Phương pháp 7.1. ① Nếu đề bài cho hình ảnh đồ thị $y = f(x)$ và $y = g(x)$, ta có thể dùng hình vẽ để xác định tọa độ giao điểm giữa chúng.

② Số nghiệm phương trình $f(x) = m$ chính bằng số giao điểm của đồ thị $y = f(x)$ với đường thẳng $y = m$ (nằm ngang).

B CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Dạng 1 Xác định (biện luận) giao điểm của đường thẳng và đồ thị của hàm số bậc ba

Xét hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$ có đồ thị (C) và đường thẳng d có phương trình $y = kx + n$.
Lập phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = kx + n \quad (1)$$

Ta có hai trường hợp xảy ra:

☑ Trường hợp 1: Phương trình (1) có "nghiệm đẹp" x_0. Khi đó, ta phân tích (1) về dạng

$$(1) \Leftrightarrow (x - x_0)(Ax^2 + Bx + C) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = x_0 \\ Ax^2 + Bx + C = 0 \quad (2) \end{bmatrix}$$

Các bài toán thường gặp:

① (C) và d có đúng ba điểm chung $\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm phân biệt khác x_0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ Ax_0^2 + Bx_0 + C \neq 0 \end{cases}$$

② (C) và d có đúng hai điểm chung $\Leftrightarrow$ (2) có đúng 1 nghiệm khác x_0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ -\dfrac{B}{2A} \neq x_0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} \Delta > 0 \\ -\dfrac{B}{2A} = x_0 \end{cases}$$

③ (C) và d có đúng một điểm chung $\Leftrightarrow$ (2) vô nghiệm hoặc có nghiệm duy nhất và nghiệm đó bằng x_0.

$$\Leftrightarrow \Delta < 0 \text{ hoặc } \begin{cases} \Delta = 0 \\ -\dfrac{B}{2A} = x_0 \end{cases}$$

☑ Trường hợp 2: Phương trình (1) không có "nghiệm đẹp". Khi đó ta tiến hành các bước:

① Cô lập tham số m, chuyển phương trình (1) về dạng $f(x) = m$. Số nghiệm phương trình này chính bằng hoành độ giao điểm của đồ thị $y = f(x)$ với đường thẳng $y = m$ (nằm ngang).

② Lập bảng biến thiên của hàm $y = f(x)$ trên miền đề bài yêu cầu.

③ Tịnh tiến đường thẳng $y = m$ theo phương song song với Ox, nhìn giao điểm suy ra kết quả.

Ví dụ 1

Đường thẳng $y = -3x + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x^2 - 1$ tại điểm duy nhất có tọa độ $(x_0; y_0)$. Chọn câu trả lời **sai** trong các câu trả lời sau đây.

(A) $x_0^3 - 2x_0^2 - 1 - y_0 = 0$.
(B) $y_0 + 3x_0 - 1 = 0$.
(C) $x_0 + y_0 + 2 = 0$.
(D) $x_0^3 - 2 = 2x_0^3 - 3x_0$.

Ví dụ 2

Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = (x-1)(x^2 - 3x + 2)$ và trục hoành là

(A) 0.
(B) 1.
(C) 2.
(D) 3.

Ví dụ 3

Đường thẳng $y = x - 1$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - x^2 + x - 1$ tại hai điểm. Tìm tổng tung độ các giao điểm đó.

(A) -3.
(B) 2.
(C) 0.
(D) -1.

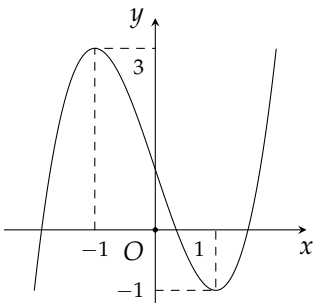
Ví dụ 4

Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ cắt đồ thị hàm số $y = x^2 - 3x + 1$ tại hai điểm phân biệt A, B. Tính độ dài AB.

(A) $AB = 3$.
(B) $AB = 2\sqrt{2}$.
(C) $AB = 2$.
(D) $AB = 1$.

Ví dụ 5

Đồ thị sau đây là của hàm số $y = x^3 - 3x + 1$. Với giá trị nào của m thì phương trình $x^3 - 3x - m = 0$ có 3 nghiệm phân biệt?



(A) $-2 < m < 2$.
(B) $-1 < m < 3$.
(C) $-2 \le m < 2$.
(D) $-2 < m < 3$.

Ví dụ 6

Cho hàm số $y = (x-2)(x^2 + mx + m^2 - 3)$. Tìm tập hợp các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

(A) $-1 < m < 2$.
(B) $\begin{cases} -2 < m < 2 \\ m \neq -1 \end{cases}$.
(C) $\begin{cases} -1 < m < 2 \\ m \neq 1 \end{cases}$.
(D) $-2 < m < -1$.

Ví dụ 7

Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ có đồ thị (C). Gọi d là đường thẳng đi qua điểm $A(3;20)$ và có hệ số góc là m. Với giá trị nào của m thì d cắt (C) tại ba điểm phân biệt?

(A) $\begin{cases} m < \dfrac{15}{4} \\ m \neq 4 \end{cases}$.
(B) $\begin{cases} m < \dfrac{1}{5} \\ m \neq 0 \end{cases}$.
(C) $\begin{cases} m > \dfrac{15}{4} \\ m \neq 24 \end{cases}$.
(D) $\begin{cases} m > \dfrac{1}{5} \\ m \neq 1 \end{cases}$.

Ví dụ 8

Biết có hai số m_1, m_2 là hai giá trị của tham số m sao cho đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 - 3mx^2 - 3x + 3m + 2$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 15$. Tính $m_1 + m_2$.

(A) 0.
(B) 3.
(C) 2.
(D) 1.

Ví dụ 9

Cho hàm số $y = x^3 + mx^2 - x - m \quad (C_m)$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số (C_m) cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng ?

(A) 2.
(B) 3.
(C) 1.
(D) 0.

Ví dụ 10

Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng $\Delta : y = x + 4$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + 2mx^2 + (m+3)x + 4$ tại ba điểm phân biệt $A(0;4)$, B và C sao cho diện tích tam giác MBC bằng 4, với $M(1;3)$.

(A) $m = 2$ hoặc $m = 3$.
(B) $m = -2$ hoặc $m = 3$.
(C) $m = 3$.
(D) $m = -2$ hoặc $m = -3$.

Dạng 2 Xác định (biện luận) giao điểm của đường thẳng và đồ thị của hàm số bậc bốn trùng phương

Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c (a \neq 0)$ có đồ thị (C) và đường thẳng $y = k$ có đồ thị d.
Lập phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d:

$$ax^4 + bx^2 + c = k \quad (1)$$

Đặt $t = x^2 (t \geq 0)$ ta có phương trình $at^2 + bt + c - k = 0$ (2).
Các bài toán thường gặp:

① (C) và d có bốn điểm chung $\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$$

② (C) và d có ba điểm chung $\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm phân biệt, trong đó có một nghiệm dương và một nghiệm $t = 0$.

③ (C) và d có hai điểm chung $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm kép dương hoặc có hai nghiệm trái dấu.

④ (C) và d có một điểm chung $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $t = 0$ và một nghiệm âm.

⑤ (C) và d không có điểm chung $\Leftrightarrow$ (2) vô nghiệm hoặc chỉ có nghiệm âm.

⚠ *Có thể chuyển bài toán về biện luận giao điểm của đồ thị cố định với một đường thẳng nằm ngang.*

Ví dụ 1

Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ với trục Ox.

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

Ví dụ 2

Đồ thị hàm số $y = 2x^4 - 3x^2$ và đồ thị hàm số $y = -x^2 + 2$ có bao nhiêu điểm chung?

(A) 2. (B) 1. (C) 3. (D) 4.

Ví dụ 3

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$ tại bốn điểm phân biệt.

(A) $m > -1$. (B) $-1 < m < 1$. (C) $m < -4$. (D) $-4 < m < -3$.

Ví dụ 4

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 3x^2 - m - 1$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt.

Ⓐ $\begin{cases} m > -1 \\ m = -\dfrac{13}{4}. \end{cases}$ Ⓑ $m > -1$. Ⓒ $\begin{cases} m \geq -1 \\ m = -\dfrac{13}{4}. \end{cases}$ Ⓓ $m \geq -1$.

Ví dụ 5

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = 2x^2|x^2 - 2|$ tại 6 điểm phân biệt?

Ⓐ 1. Ⓑ 0. Ⓒ 2. Ⓓ 3.

Ví dụ 6

Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m trong khoảng $(-3;5)$ để đồ thị hàm số $y = x^4 + (m-5)x^2 - mx + 4 - 2m$ tiếp xúc với trục hoành?

Ⓐ 2. Ⓑ 3. Ⓒ 1. Ⓓ 4.

Ví dụ 7

Cho hàm số: $y = x^4 - (2m-1)x^2 + 2m$ có đồ thị (C). Tất cả có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để đường thẳng d: $y = 2$ cắt đồ thị (C) tại bốn điểm phân biệt đều có hoành độ bé hơn 3?

Ⓐ 3. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ 4.

Dạng 3 Xác định (biện luận) giao của đường thẳng và đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

Cho hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, $(ad - bc \neq 0)$ có đồ thị (C) và đường thẳng d có phương trình $y = kx + n$.

Lập phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d:

$$\frac{ax+b}{cx+d} = kx + n \Leftrightarrow \begin{cases} Ax^2 + Bx + C = 0 \ (1) \\ x \neq -\dfrac{d}{c} = x_0 \end{cases}$$

Các bài toán thường gặp

① (C) và d có hai điểm chung $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt khác $x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ Ax_0^2 + Bx_0 + C \neq 0 \end{cases}$

② Giả sử hai đồ thị trên cắt nhau tại hai điểm phân biệt $M(x_1; kx_1 + n)$ và $N(x_2; kx_2 + n)$. Khi đó

$$MN = \sqrt{k^2+1}\sqrt{\frac{\Delta}{A^2}}$$

Ví dụ 1

Đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ cắt hai trục Ox và Oy tại A và B. Khi đó diện tích của tam giác OAB (với O là gốc tọa độ) bằng

(A) 1. (B) $\frac{1}{4}$. (C) 2. (D) $\frac{1}{2}$.

Ví dụ 2

Biết đường thẳng $y = x - 2$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x}{x-1}$ tại 2 điểm phân biệt A, B. Tìm hoành độ trọng tâm tam giác OAB với O là gốc tọa độ.

(A) $\frac{2}{3}$. (B) 2. (C) $\frac{4}{3}$. (D) 4.

Ví dụ 3

Gọi M, N là giao điểm của đường thẳng $y = x + 1$ và đường cong $y = \frac{2x+4}{x-1}$. Tìm hoành độ trung điểm của đoạn thẳng MN.

(A) $x = -1$. (B) $x = 1$. (C) $x = -2$. (D) $x = 2$.

Ví dụ 4

Cho hàm số $y = \frac{2x}{x+1}$ có đồ thị (C). Gọi A, B là giao điểm của đường thẳng $d : y = x$ với đồ thị (C). Tính độ dài đoạn AB.

(A) $AB = \sqrt{2}$. (B) $AB = \frac{\sqrt{2}}{2}$. (C) $AB = 1$. (D) $AB = 2$.

Ví dụ 5

Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-14; 15]$ sao cho đường thẳng $y = mx + 3$ cắt đồ thị của hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt.

(A) 17. (B) 16. (C) 20. (D) 15.

Ví dụ 6

Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ có đồ thị (C). Tìm các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y = x + m - 1$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB = 2\sqrt{3}$.

(A) $m = 4 \pm \sqrt{3}$. (B) $m = 2 \pm \sqrt{3}$. (C) $m = 4 \pm \sqrt{10}$. (D) $m = 2 \pm \sqrt{10}$.

Ví dụ 7

Biết rằng có hai giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ (C) và đường thẳng $d: y = mx + 3$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB vuông tại O (với O là gốc tọa độ). Tổng của hai giá trị đó bằng

(A) 0. (B) 4. (C) 8. (D) 6.

Ví dụ 8

Cho hàm số $y=\dfrac{3x-2}{x+1}$ có đồ thị (C) và điểm $A(-5;5)$. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y=-x+m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt M, N sao cho tứ giác $OAMN$ là hình bình hành (O là gốc tọa độ).

(A) $m=3$.
(B) $m=2+\sqrt{5}$.
(C) $m=2+\sqrt{5}, m=2-\sqrt{5}$.
(D) $m=2-\sqrt{5}$.

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BẢNG TÔ ĐÁP ÁN TỰ LUYỆN

Học sinh làm BTTL xong, tô phương án đúng. Buổi học sau, cùng với GV kiểm tra kết quả.

1	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	7	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	13	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	19	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	25	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
2	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	8	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	14	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	20	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	26	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
3	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	9	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	15	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	21	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	27	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
4	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	10	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	16	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	22	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	28	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
5	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	11	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	17	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	23	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	29	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
6	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	12	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	18	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	24	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	30	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

Câu 1

Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 + 2x^2 - 4x + 1$ và đường thẳng $y = 2$.

Ⓐ 1. Ⓑ 3. Ⓒ 2. Ⓓ 0.

Câu 2

Đồ thị hàm số $y = x^4 - x^3 - 3$ cắt trục tung tại mấy điểm?

Ⓐ 1 điểm. Ⓑ 2 điểm. Ⓒ 4 điểm. Ⓓ 3 điểm.

Câu 3

Đồ thị hàm số $y = x^4 - 5x^2 + 4$ cắt trục hoành tại bao nhiêu điểm?

Ⓐ 0. Ⓑ 4. Ⓒ 2. Ⓓ 3.

Câu 4

Tìm số giao điểm n của hai đồ thị (C_1): $y = x^4 - 3x^2 + 2$ và (C_2): $y = x^2 - 2$.

Ⓐ $n = 1$. Ⓑ $n = 4$. Ⓒ $n = 2$. Ⓓ $n = 0$.

Câu 5

Đồ thị hàm số $y = \dfrac{4x + 4}{x - 1}$ và $y = x^2 - 1$ cắt nhau tại bao nhiêu điểm?

Ⓐ 1. Ⓑ 3. Ⓒ 2. Ⓓ 0.

Câu 6

Biết rằng đồ thị hàm số $y = x^3 + x^2 - x + 2$ và đồ thị hàm số $y = -x^2 - x + 5$ cắt nhau tại điểm duy nhất có tọa độ $(x_0; y_0)$. Tìm y_0.

Ⓐ 0. Ⓑ 4. Ⓒ 1. Ⓓ 3.

Câu 7

Đồ thị hàm số nào sau đây cắt trục tung tại điểm có tung độ âm?

(A) $y=\dfrac{4x+1}{x+2}$. (B) $y=\dfrac{-2x+3}{x+1}$. (C) $y=\dfrac{3x+4}{x-1}$. (D) $y=\dfrac{2x-3}{x-1}$.

Câu 8

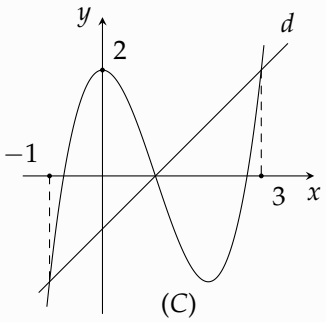
Biết đường thẳng $y=x-2$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A, B có hoành độ lần lượt là x_A, x_B. Khi đó

(A) $x_A+x_B=5$. (B) $x_A+x_B=2$. (C) $x_A+x_B=1$. (D) $x_A+x_B=3$.

Câu 9

Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ, đường thẳng d có phương trình $y=x-1$. Biết phương trình $f(x)=0$ có ba nghiệm $x_1<x_2<x_3$. Giá trị của x_1x_3 bằng

(A) -2. (B) $-\dfrac{5}{2}$. (C) $-\dfrac{7}{3}$. (D) -3.



Câu 10

Biết rằng đồ thị hàm số $y=x^3-4x^2+5x-1$ cắt đồ thị hàm số $y=1$ tại hai điểm phân biệt A và B. Tính độ dài đoạn thẳng AB.

(A) $AB=2$. (B) $AB=3$. (C) $AB=2\sqrt{2}$. (D) $AB=1$.

Câu 11

Cho hàm số $y=\dfrac{4}{3}x^3-2x^2+1$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y=-m$. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để d cắt (C) tại ba điểm phân biệt.

(A) $\left[\dfrac{1}{3};1\right]$. (B) $\left[-1;-\dfrac{1}{3}\right]$. (C) $\left(\dfrac{1}{3};1\right)$. (D) $\left(-1;-\dfrac{1}{3}\right)$.

Câu 12

Tìm m để đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2+m$ cắt trục hoành bốn điểm phân biệt.

(A) $m>0$. (B) $0<m<1$. (C) $m>1$. (D) $m<1$.

Câu 13

Có bao nhiêu số m nguyên âm để đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+(1-m)x+m+1$ cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt.

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

Câu 14

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 - 3x + m$ cắt trục hoành tại đúng 3 điểm phân biệt.

(A) $m \in (2; +\infty)$. (B) $m \in (-2; 2)$. (C) $m \in \mathbb{R}$. (D) $m \in (-\infty; -2)$.

Câu 15

Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + (3m-1)x + 6m$ có đồ thị là (C). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để (C) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn điều kiện $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2x_3 = 20$. Tính tổng các phần tử của tập S.

(A) $\frac{4}{3}$. (B) $\frac{2}{3}$. (C) $\frac{5}{3}$. (D) $\frac{1}{3}$.

Câu 16

Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 9x - 7$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

(A) $\left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = \dfrac{-1 \pm \sqrt{15}}{2} \end{array}\right.$. (B) $m = \dfrac{-1 + \sqrt{15}}{2}$. (C) $m = \dfrac{-1 - \sqrt{15}}{2}$. (D) $m = 1$.

Câu 17

Giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - mx$ cắt trục hoành tại ba điểm A, B, C phân biệt và cách đều nhau là

(A) 2. (B) 1. (C) -2. (D) 0.

Câu 18

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $-x^4 + 2x^2 + 3 + 2m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

(A) $-2 \leqslant m \leqslant \frac{-3}{2}$. (B) $\frac{-3}{2} < m < 2$. (C) $-2 < m < \frac{-3}{2}$. (D) $3 < m < 4$.

Câu 19

Tìm tất cả các giá trị m nguyên để phương trình $x^4 - 2x^2 + 3 - m = 0$ có bốn nghiệm thực.

(A) 1. (B) 2.
(C) 3. (D) Không có giá trị m.

Câu 20

Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^2|x^2 - 3|$ và đường thẳng $y = 2$.

(A) 8. (B) 2. (C) 6. (D) 4.

Câu 21

Có bao nhiêu đường thẳng cắt đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{5x-3}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt mà hai giao điểm đó có hoành độ và tung độ là các số nguyên?

(A) 15. (B) 4. (C) 2. (D) 6.

Câu 22

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-3}{x+1}$ cắt đường thẳng $y=x+m$ tại hai điểm phân biệt khi

(A) $m>-2$. (B) $m>6$. (C) $\left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>6 \end{array}\right.$. (D) $m<-2$.

Câu 23

Cho hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c$ $(b<0, a\neq 0)$. Biết rằng đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt trong đó có hai giao điểm đối xứng nhau qua gốc tọa độ. Tính giá trị của biểu thức $T=2(ab-c)+3$.

(A) $T=5$. (B) $T=2$. (C) $T=3$. (D) $T=1$.

Câu 24

Cho hàm số $y=\dfrac{3x+2}{x+2}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y=ax+2b-4$. Đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm A và B đối xứng nhau qua gốc tọa độ O. Tính $a+b$.

(A) $T=2$. (B) $T=\dfrac{5}{2}$. (C) $T=4$. (D) $T=\dfrac{7}{2}$.

Câu 25

Đường thẳng d đi qua $A(2;1)$ với hệ số góc k cắt đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{x-8}{x-4}$ tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi

(A) $k>0$. (B) $-1<k<1$. (C) $k<1$ hoặc $k>3$. (D) $k<0$ hoặc $k>4$.

Câu 26

Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$ có đồ thị (C). Tìm các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y=x+m-1$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB=2\sqrt{3}$.

(A) $m=4\pm\sqrt{3}$. (B) $m=4\pm\sqrt{10}$. (C) $m=2\pm\sqrt{10}$. (D) $m=2\pm\sqrt{3}$.

Câu 27

Tìm giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y=2x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ (C) tại hai điểm A, B phân biệt sao cho đoạn AB ngắn nhất.

(A) $m=0$. (B) $m=-1$. (C) $m=-2$. (D) $m=1$.

Câu 28

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $(d)\colon y = mx - m - 1$ cắt đồ thị $(C)\colon y = x^3 - 3x^2 + 1$ tại 3 điểm A, B, C phân biệt (B thuộc đoạn AC), sao cho tam giác AOC cân tại O (với O là gốc toạ độ).

(A) $m = -1$. (B) $m = 1$. (C) $m = 2$. (D) $m = -2$.

Câu 29

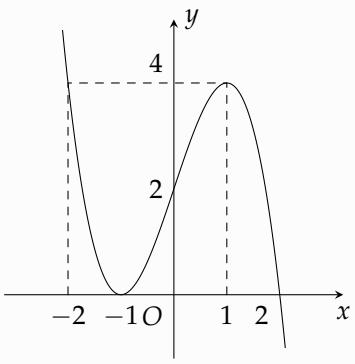
Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $\begin{cases} a + c > b + 1 \\ a + b + c + 1 < 0 \end{cases}$. Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ và trục Ox.

(A) 2. (B) 3. (C) 0. (D) 1.

Câu 30

Biết đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số $y = -x^3 + 3x + 2$. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình $-|x|^3 + 3|x| + 2 = m$ có 4 nghiệm phân biệt là

(A) $\varnothing$. (B) $(2;4)$. (C) $(0;4)$. (D) $(0;2)$.



—HẾT—

§8. TIẾP TUYẾN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

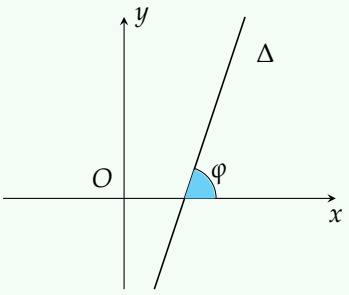
Một số lưu ý đến phương trình tiếp tuyến

☑ Đường thẳng đi qua điểm $M(x_0;y_0)$ có hệ số góc k có phương trình là $y=k(x-x_0)+y_0$.

⚠ ① $k=\tan\varphi$, *với* φ *là góc hợp bởi đường thẳng* Δ *với chiều dương của trục* Ox *và* $\varphi\neq 90^\circ$.

② *Cho hai đường thẳng* $\Delta_1: y=k_1x+m_1$ *và* $\Delta_2: y=k_2x+m_2$.

- $\Delta_1 \parallel \Delta_2 \Leftrightarrow k_1=k_2$ *và* $m_1\neq m_2$.
- $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow k_1\cdot k_2=-1$.

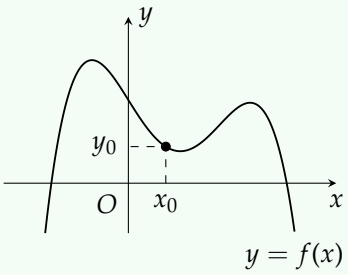


☑ Tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M(x_0;y_0)$:

① Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến d của đồ thị hàm số tại điểm $M(x_0;y_0)$ có phương trình là $\boxed{y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0}$ (lúc này $k=f'(x_0)$).

Trong đó

- x_0 gọi là hoành độ tiếp điểm;
- y_0 là tung độ tiếp điểm, với $y_0=f(x_0)$;
- $f'(x_0)$ gọi là hệ số góc của tiếp tuyến.



B CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Dạng 1 Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm $(x_0;y_0)$

- Tính $f'(x)$. Từ đây tính $f'(x_0)$ hoặc bấm máy $\left.\dfrac{d}{dx}(f(x))\right|_{x=x_0}$.
- Thay vào công thức $\boxed{y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0}$, thu gọn kết quả về dạng $y=Ax+B$.

⚠ *Trong nhiều trường hợp, đề bài chưa cho đầy đủ* $(x_0;y_0)$. *ta thường gặp các loại sau:*

① *Cho biết trước* x_0 *hoặc* y_0. *Ta chỉ việc thay giá trị đó vào hàm số* $y=f(x)$, *sẽ tính được đại lượng còn lại.*

② *Cho trước 1 điều kiện giải. Ta chỉ việc giải điều kiện đó, tìm* x_0.

Ví dụ 1

Cho hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 4$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến với (C) tại điểm $M(1;1)$.

(A) $y = -x + 2$. (B) $y = -2x + 3$. (C) $y = -3x + 4$. (D) $y = -4x + 5$.

Ví dụ 2

Tiếp tuyến với đồ thị của hàm số $f(x) = \dfrac{3}{2x-1}$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 2$ có hệ số góc là

(A) $-\dfrac{2}{3}$. (B) $\dfrac{2}{3}$. (C) 2. (D) -2.

Ví dụ 3

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^2 - 3x + 1$ tại điểm có hoành độ bằng 3 là

(A) $y = 3x - 8$. (B) $y = 3x - 10$. (C) $y = -3x + 10$. (D) $y = -3x - 8$.

Ví dụ 4

Tìm hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \dfrac{3-4x}{x-2}$ tại điểm có tung độ $y = -\dfrac{7}{3}$.

(A) $\dfrac{9}{5}$. (B) $-\dfrac{5}{9}$. (C) $\dfrac{5}{9}$. (D) -10.

Ví dụ 5

Tiếp tuyến của đường cong (C): $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ tại điểm $M(2;5)$ cắt các trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại A và B. Tính diện tích tam giác OAB.

(A) $\dfrac{121}{6}$. (B) $-\dfrac{121}{6}$. (C) $\dfrac{121}{3}$. (D) $-\dfrac{121}{3}$.

Ví dụ 6

Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 4$ tại giao điểm của đồ thị hàm số với trục Ox là

(A) $y = 9x + 9$. (B) $y = -9x + 9$ và $y = 0$.
(C) $y = 9x - 9$ và $y = 0$. (D) $y = -9x - 9$.

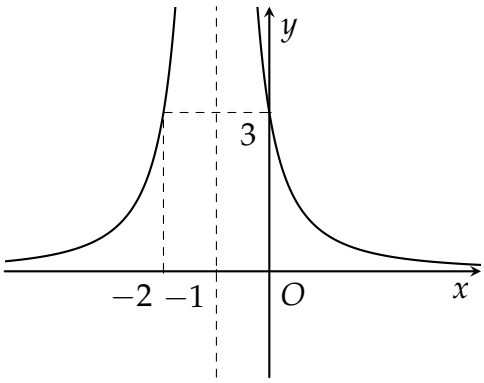
Ví dụ 7

Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{x+2}$ có đồ thị (C) và đường thẳng (d): $y = -2x + m - 1$ (m là tham số thực). Gọi k_1, k_2 là hệ số góc của tiếp tuyến tại giao điểm của (d) và (C). Khi đó $k_1 \cdot k_2$ bằng

(A) 3. (B) 4. (C) $\dfrac{1}{4}$. (D) 2.

Ví dụ 8

Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}, (a,b,c,d \in \mathbb{R}; c \neq 0, d \neq 0)$ có đồ thị (C). Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Biết (C) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -2. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục hoành.



(A) $x - 3y + 2 = 0$. (B) $x + 3y - 2 = 0$.
(C) $x + 3y + 2 = 0$. (D) $x - 3y - 2 = 0$.

Dạng 2 Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ khi biết hệ số góc

- Tính $f'(x)$. Giải phương trình $f'(x) = k_0$, tìm nghiệm x_0.
- Thay x_0 vào $y = f(x)$, tìm y_0.
- Viết phương trình tiếp tuyến tại $(x_0; y_0)$ theo công thức $\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0}$.

⚠ *Trong nhiều trường hợp, ta gặp các dạng sau:*

① *Biết tiếp tuyến song song với* $\Delta: y = ax + b$. *Khi đó* $k_0 = a$ *hay* $f'(x_0) = a$.

② *Biết tiếp tuyến vuông góc với* $\Delta: y = ax + b$. *Khi đó* $k_0 \cdot a = -1$ *hay* $f'(x_0) = -\dfrac{1}{a}$.

③ *Biết tiếp tuyến tạo với* Ox *một góc* φ *thì* $k_0 = \pm\tan\varphi$.

④ *Biết tiếp tuyến cắt* Ox, Oy *lần lượt tại hai điểm* A, B *thỏa* $OA = m \cdot OB$ *thì* $k_0 = \pm\dfrac{OB}{OA}$.

⑤ *Biết tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất (hoặc lớn nhất) thì* $k_0 = \min f'(x)$ *(hoặc* $\max f'(x)$*). Đối với hàm bậc ba thì* $k_{\max}$ *hoặc* $k_{\min}$ *đạt được tại* x_0 *thỏa* $f''(x) = 0$.

Ví dụ 1

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^4 - x^2 + 6$, biết tiếp tuyến có hệ số góc $k = 6$.

(A) $y = 6x + 6$. (B) $y = -6x + 1$. (C) $y = -6x + 10$. (D) $y = 6x + 10$.

Ví dụ 2

Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 9x + 5$ có hệ số góc lớn nhất là

(A) $y = 12x + 18$. (B) $y = 9x - 9$. (C) $y = 12x + 6$. (D) $y = 4x + 4$.

Ví dụ 3

Cho hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 5$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số có hệ số góc nhỏ nhất là

(A) $y=-x+\frac{17}{3}$. (B) $y=-x+\frac{23}{3}$. (C) $y=5$. (D) $y=\frac{19}{3}$.

Ví dụ 4

Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-3x^2+3x+1$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến với đồ thị (C) của hàm số song song với đường thẳng $y=-2x-1$. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) là

(A) $y=-2x+\frac{10}{3}; y=-2x-22$. (B) $y=-2x-10; y=-2x-\frac{22}{3}$.

(C) $y=-2x+\frac{10}{3}; y=-2x+\frac{22}{3}$. (D) $y=-2x+\frac{10}{3}; y=-2x-\frac{22}{3}$.

Ví dụ 5

Cho $(C_m): y=\frac{1}{4}x^4-\frac{3m+4}{2}x^2+3m+3$. Gọi $A\in(C_m)$ có hoành độ 1. Tìm m để tiếp tuyến tại A song song với đường thẳng $d: y=6x+2017$?

(A) $m=-3$. (B) $m=3$. (C) $m=5$. (D) $m=0$.

Ví dụ 6

Tìm điểm M có hoành độ âm trên đồ thị (C): $y=\frac{1}{3}x^3-x+\frac{2}{3}$ sao cho tiếp tuyến tại M vuông góc với đường thẳng $y=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$.

(A) $M(-2;-4)$. (B) $M\left(-1;\frac{4}{3}\right)$. (C) $M\left(2;\frac{4}{3}\right)$. (D) $M(-2;0)$.

Ví dụ 7

Cho hàm số $y=-x^3+3x^2-3$ có đồ thị (C). Số tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $y=\frac{1}{9}x+2017$ là

(A) 2. (B) 1. (C) 0. (D) 3.

Ví dụ 8

Cho hàm số $y=\frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu tiếp tuyến của (C) cắt trục Ox, Oy lần lượt tại hai điểm A và B thỏa mãn điều kiện $OA=4OB$.

(A) 2. (B) 3. (C) 1. (D) 4.

Dạng 3 Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$, biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(x_A;y_A)$

- Gọi $d: y=k(x-x_A)+y_A$ (1) là đường thẳng đi qua điểm A và có hệ số góc k.
- d là tiếp tuyến khi hệ $\begin{cases}f(x)=k(x-x_A)+y_A\\f'(x)=k\end{cases}$ (2) có nghiệm x.

- Giải hệ (2), tìm x và k.
- Thay k vào (1), ta được kết quả.

Ví dụ 1

Cho hàm số $y = x^3 - 9x^2 + 17x + 2$ có đồ thị (C). Qua điểm $M(-2;5)$ kẻ được tất cả bao nhiêu tiếp tuyến đến (C)?

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Ví dụ 2

Cho đường cong $(C)\colon y = x^4 - 4x^2 + 2$ và điểm $A(0;a)$. Nếu qua A kẻ được 4 tiếp tuyến với (C) thì a phải thỏa mãn điều kiện

(A) $a \in \left(2;\dfrac{10}{3}\right)$. (B) $a \in (2;+\infty)$.

(C) $a \in (-\infty;2) \cup \left(\dfrac{10}{3};+\infty\right)$. (D) $a \in \left(-\infty;\dfrac{10}{3}\right)$.

Ví dụ 3

Đường thẳng $x + y = 2m$ là tiếp tuyến của đường cong $y = -x^3 + 2x + 4$ khi m bằng

(A) -3 hoặc 1. (B) 1 hoặc 3. (C) -1 hoặc 3. (D) -3 hoặc -1.

Ví dụ 4

Cho hàm số $y = \dfrac{2x}{x+1}$ có đồ thị (C) và điểm $A(0;a)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của a để từ A kẻ được hai tiếp tuyến AM, AN đến (C) với M, N là các tiếp điểm và $MN = 4$. Tổng các phần tử của S bằng bao nhiêu?

(A) 4. (B) 3. (C) 6. (D) 1.

Ví dụ 5

Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ (1). Biết trên trục tung có đúng hai điểm M, N mà từ đó chỉ kẻ được tới đồ thị của hàm số (1) đúng một tiếp tuyến. Độ dài đoạn MN là

(A) $\sqrt{5}$. (B) 2. (C) $\dfrac{2}{3}$. (D) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Dạng 4 Bài tập tổng hợp

Ví dụ 1

Cho hàm số $y = \dfrac{x+2}{2x+3}$ có đồ thị (C). Đường thẳng d có phương trình $y = ax + b$ là tiếp tuyến của (C), biết d cắt trục hoành tại A và cắt trục tung tại B sao cho tam giác OAB cân tại O, với O là gốc tọa độ. Tính $a + b$.

(A) -1. (B) -2. (C) 0. (D) -3.

Ví dụ 2

Cho các hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$. Nếu hệ số góc tiếp tuyến của các đồ thị hàm số đã cho tại điểm có hoành độ x_0 bằng nhau và khác không thì

(A) $f(x_0)>\dfrac{1}{4}$. (B) $f(x_0)\le\dfrac{1}{4}$. (C) $f(x_0)\le\dfrac{1}{2}$. (D) $f(x_0)<\dfrac{1}{4}$.

Ví dụ 3

Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{2x-1}$, có đồ thị (H). Biết $A\left(x_1;y_1\right)$, $B\left(x_2;y_2\right)$ là hai điểm phân biệt thuộc (H) sao cho tiếp tuyến của (H) tại A, B song song với nhau. Tìm độ dài nhỏ nhất của đoạn thẳng AB.

(A) $2\sqrt{6}$. (B) $\sqrt{3}$. (C) $\sqrt{6}$. (D) $3\sqrt{2}$.

Ví dụ 4

Cho hàm số $y=\dfrac{-x+1}{2x-1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $(d)\colon y=x+m$. Với mọi giá trị của m đường thẳng (d) luôn cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A và B. Gọi k_1,k_2 lần lượt là hệ số góc của các tiếp tuyến với (C) tại A và B. Giá trị nhỏ nhất của $T=k_1^{2020}+k_2^{2020}$ bằng

(A) 1. (B) 2. (C) $\dfrac{1}{2}$. (D) $\dfrac{2}{3}$.

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BẢNG TÔ ĐÁP ÁN TỰ LUYỆN

Học sinh làm BTTL xong, tô phương án đúng. Buổi học sau, cùng với GV kiểm tra kết quả.

1	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	7	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	13	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	19	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	25	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
2	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	8	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	14	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	20	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	26	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
3	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	9	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	15	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	21	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	27	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
4	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	10	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	16	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	22	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	28	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
5	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	11	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	17	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	23	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	29	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
6	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	12	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	18	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	24	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	30	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

Câu 1

Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=-x^2+4x+7$ tại điểm $A(-1;2)$ có hệ số góc là

Ⓐ 2. Ⓑ 4. Ⓒ -2. Ⓓ 6.

Câu 2

Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x-2}{2x-1}$ tại điểm có hoành độ 2 là

Ⓐ $\dfrac{3}{2}$. Ⓑ -1. Ⓒ $\dfrac{1}{9}$. Ⓓ $\dfrac{1}{3}$.

Câu 3

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=-2x^4+x^2+3$ tại điểm $M(1;2)$ là

Ⓐ $y=-6x+8$. Ⓑ $y=-6x+6$. Ⓒ $y=-6x-6$. Ⓓ $y=-6x-8$.

Câu 4

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)=x^3-2x^2+3x+1$ tại điểm có hoành độ $x_0=2$.

Ⓐ $y=-x-7$. Ⓑ $y=7x-14$. Ⓒ $y=7x-7$. Ⓓ $y=-x+9$.

Câu 5

Số tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^4+2x^2+2$ tại điểm có tung độ bằng 2 là

Ⓐ 3. Ⓑ 2. Ⓒ 4. Ⓓ 1.

Câu 6

Cho hàm số $y=-x^3+3x-2$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung.

Ⓐ $y=-2x+1$. Ⓑ $y=2x+1$. Ⓒ $y=3x-2$. Ⓓ $y=-3x-2$.

Câu 7

Cho hàm số $y=-x^3+3x-2$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M, biết M là giao điểm của (C) với đường thẳng có phương trình $y=-x-2$ và $x_M>0$.

(A) $y=-9x-12$. (B) $y=-9x+12$. (C) $y=-9x+14$. (D) $y=-9x-14$.

Câu 8

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^3}{3}+3x^2-2(\mathcal{C})$ có hệ số góc $k=-9$ là đường thẳng

(A) $(d):y-16=-9(x+3)$. (B) $(d):y=-9(x+3)$.

(C) $(d):y+16=-9(x+3)$. (D) $(d):y-16=-9(x-3)$.

Câu 9

Số tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2-8x+1$ song song với đường thẳng $(d):y=x+28$ là

(A) 2. (B) 1. (C) 0. (D) 3.

Câu 10

Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x+1}$ song song với đường thẳng $y=5x+17$ có phương trình là

(A) $y=5x+17;y=5x+3$. (B) $y=5x+3$.

(C) $y=5x-3$. (D) $y=5x+17;y=5x-3$.

Câu 11

Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=-x^3+2x^2$ song song với đường thẳng $y=x$?

(A) 3. (B) 2. (C) 0. (D) 1.

Câu 12

Cho đường cong (C) có phương trình $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$. Tìm phương trình tiếp tuyến của đường cong (C) biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d:y=-4x+3$.

(A) $y=\dfrac{1}{4}x-\dfrac{7}{4}$. (B) $y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{3}{4}$ và $y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{5}{4}$.

(C) $y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{5}{4}$ và $y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{13}{4}$. (D) $y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{5}{4}$.

Câu 13

Tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+2$ vuông góc với đường thẳng $x-3y+1=0$ có phương trình là

(A) $x-3y+3=0$. (B) $3x-y-3=0$. (C) $3x+y-3=0$. (D) $3x+y-1=0$.

Câu 14

Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+x}{x-2}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d\colon y=-2x$. Biết d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B. Tích các hệ số góc của các tiếp tuyến của (C) tại A, B bằng

(A) 0. (B) 4. (C) $-\dfrac{1}{6}$. (D) $\dfrac{5}{2}$.

Câu 15

Cho hàm số $y=4x+2\cos 2x$ có đồ thị là (C). Hoành độ của các điểm trên (C) mà tại đó tiếp tuyến của (C) song song hoặc trùng với trục hoành là

(A) $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\ \ (k\in\mathbb{Z})$. (B) $x=\pi+k\pi\ \ (k\in\mathbb{Z})$.

(C) $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\ \ (k\in\mathbb{Z})$. (D) $x=k2\pi\ \ (k\in\mathbb{Z})$.

Câu 16

Ký hiệu d là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^4-4x^2+2m^2+1\quad (C)$ tại giao điểm của (C) với trục hoành đồng thời (C) đi qua điểm $A(1;0)$. Hỏi có bao nhiêu đường thẳng d thỏa mãn bài toán?

(A) 3. (B) 2. (C) 8. (D) 4.

Câu 17

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{x-1}$ cắt trục tung tại điểm $A(0;-1)$, tiếp tuyến của đồ thị tại điểm A có hệ số góc $k=-3$. Giá trị của a và b là

(A) $a=1;b=1$. (B) $a=2;b=2$. (C) $a=2;b=1$. (D) $a=1;b=2$.

Câu 18

Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+(m+1)x-m$. Gọi A là giao điểm của đồ thị hàm số với trục Oy. Tìm giá trị của m để tiếp tuyến của đồ thị tại A vuông góc với đường thẳng $y=2x-3$.

(A) $m=-\dfrac{3}{2}$. (B) $m=-\dfrac{1}{2}$. (C) $m=-3$. (D) $m=1$.

Câu 19

Cho parabol $(P)\colon y=x^2-3x$. Tiếp tuyến của (P) đi qua điểm $A(5;10)$ có phương trình là

(A) $y=5x-15$. (B) $y=7x-25$. (C) $y=x+5$. (D) $y=3x-5$.

Câu 20

Cho đồ thị $(C)\colon y=\dfrac{x-1}{2x}$ và d_1, d_2 là hai tiếp tuyến của (C) song song với nhau. Khoảng cách lớn nhất giữa d_1 và d_2 là

(A) 3. (B) $2\sqrt{3}$. (C) 2. (D) $2\sqrt{2}$.

Câu 21

Biết đồ thị hàm số $(C)\colon y = x^3 - 3x + 2$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $(C')\colon y = ax^2 + b$ tại điểm có hoành độ $x \in (0;2)$. Giá trị lớn nhất của $S = a + b$ là

(A) -1. (B) 0. (C) 1. (D) -3.

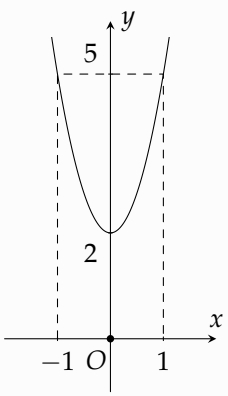
Câu 22

Cho các hàm số $y = f(x), y = g(x), y = \dfrac{f(x)+3}{g(x)+1}$. Hệ số góc tiếp tuyến của các đồ thị hàm số đã cho tại điểm có hoành độ $x = 1$ bằng nhau và khác 0. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) $f(1) \le -\dfrac{11}{4}$. (B) $f(1) < -\dfrac{11}{4}$. (C) $f(1) > -\dfrac{11}{4}$. (D) $f(1) \ge -\dfrac{11}{4}$.

Câu 23

Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ có đồ thị là (C). Biết đồ thị (C) đi qua gốc tọa độ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cho bởi hình vẽ bên. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ bằng $x = 1$.



(A) $y = x + 2$. (B) $y = x + 4$. (C) $y = 5x + 2$. (D) $y = 5x - 2$.

Câu 24

Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 2$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) mà có hệ số góc lớn nhất là

(A) $y = 3x + 1$. (B) $y = -3x + 1$. (C) $y = 3x - 1$. (D) $y = -3x - 1$.

Câu 25

Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + (m-1)x + 2m$ có đồ thị là (C_m). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m để từ $M(1;2)$ kẻ được đúng hai tiếp tuyến với (C_m). Tính tổng các phần tử của S.

(A) $\dfrac{4}{3}$. (B) $\dfrac{81}{109}$. (C) $\dfrac{3}{4}$. (D) $\dfrac{217}{81}$.

Câu 26

Cho hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị là (C). Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm thuộc đồ thị (C) với hoành độ $x_0 = 0$ cắt hai đường tiệm cận của đồ thị (C) tại hai điểm A, B. Tính diện tích tam giác IAB, với I là giao điểm hai đường tiệm cận của đồ thị (C).

(A) $S_{\triangle IAB} = 6$. (B) $S_{\triangle IAB} = 3$. (C) $S_{\triangle IAB} = 12$. (D) $S_{\triangle IAB} = 6\sqrt[3]{2}$.

Câu 27

Đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2$ có bao nhiêu tiếp tuyến song song với trục Ox.

(A) 3. (B) 2. (C) 1. (D) 0.

Câu 28

Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2$ có đồ thị (C) và điểm $A(0;a)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của a để có đúng hai tiếp tuyến của (C) đi qua A. Tích các giá trị các phần tử của S là

(A) 1. (B) -1. (C) 0. (D) 3.

Câu 29

Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{2}x^2$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu điểm A thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1;y_1)$, $N(x_2;y_2)$ (M, N khác A) thỏa mãn $y_1 - y_2 = 6(x_1 - x_2)$?

(A) 2. (B) 3. (C) 1. (D) 0.

Câu 30

Cho hàm số $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 3$ có đồ thị (C). Tồn tại hai tiếp tuyến của (C) phân biệt và có cùng hệ số góc k, đồng thời đường thẳng đi qua các tiếp điểm của hai tiếp tuyến đó cắt các trục Ox, Oy tương ứng tại A và B sao cho $OA = 2017 \cdot OB$. Hỏi có bao nhiêu giá trị của k thoả mãn yêu cầu bài toán?

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

—-HẾT—-

Chương 2

HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

§1. LŨY THỪA

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Lũy thừa với số mũ nguyên

☑ Lũy thừa với số mũ nguyên dương: Cho $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$, khi đó: $a^n = \underbrace{a.a.a...a}_{n \text{ thừa số}}$.

☑ Lũy thừa với số mũ nguyên âm: Cho $a \neq 0, n \in \mathbb{N}^*$, khi đó: $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

⚠ ① *Với* $a \neq 0$, *ta quy ước* $a^0 = 1$. ② 0^0 *và* 0^{-n} $(n \in \mathbb{N}^*)$ *không có nghĩa.*

2. Lũy thừa với số mũ hữu tỉ

☑ Cho $a > 0$ và số hữu tỉ $r = \dfrac{m}{n}$; trong đó $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Khi đó: $a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

3. Lũy thừa với số mũ vô tỉ

☑ Cho $a > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, (r_n) là dãy số hữu tỉ sao cho $\lim\limits_{x \to +\infty} r_n = \alpha$. Khi đó: $a^\alpha = \lim\limits_{x \to +\infty} r_n = a^{r_n}$.

4. Công thức biến đổi lũy thừa cần nhớ

☑ **Công thức cần nhớ**: Cho cơ số $a, b > 0$ và hai số thực x, y. Khi đó, ta có:

① $a^0 = 1; a^1 = a$. ② $a^{-1} = \dfrac{1}{a}; a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$. ③ $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}; \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

④ $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$. ⑤ $a^{m-n} = \dfrac{a^m}{a^n}$. ⑥ $a^{m \cdot n} = (a^m)^n = (a^n)^m$.

⑦ $(ab)^n = a^n \cdot b^n$. ⑧ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$. ⑨ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \left(\dfrac{b}{a}\right)^{-n}$.

☑ **So sánh hai lũy thừa**: Cho cơ số $a > 0$ và hai số thực x, y. Khi đó, ta có:

① Nếu $a > 1$ thì $a^x > a^y \Leftrightarrow x > y$. ② Nếu $0 < a < 1$ thì $a^x > a^y \Leftrightarrow x < y$.

B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1 Tính giá trị biểu thức

☑ **Công thức cần nhớ**: Cho cơ số $a, b > 0$ và hai số thực x, y. Khi đó, ta có:

① $a^0 = 1; a^1 = a$. ② $a^{-1} = \frac{1}{a}; a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. ③ $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}; \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

④ $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$. ⑤ $a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$. ⑥ $a^{m\cdot n} = (a^m)^n = (a^n)^m$.

⑦ $(ab)^n = a^n \cdot b^n$. ⑧ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$. ⑨ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{b}{a}\right)^{-n}$.

☑ **So sánh hai lũy thừa**: Cho cơ số $a > 0$ và hai số thực x, y. Khi đó, ta có:

① Nếu $a > 1$ thì $a^x > a^y \Leftrightarrow x > y$. ② Nếu $0 < a < 1$ thì $a^x > a^y \Leftrightarrow x < y$.

Ví dụ 1

Tính giá trị biểu thức $A = \dfrac{6^{3+\sqrt{5}}}{2^{2+\sqrt{5}} \cdot 3^{1+\sqrt{5}}}$.

(A) 1. (B) $6^{-\sqrt{5}}$. (C) 18. (D) 9.

Ví dụ 2

Tính giá trị của biểu thức $A = \left(\frac{1}{625}\right)^{-\frac{1}{4}} + 16^{\frac{3}{4}} - 2^{-2}.64^{\frac{1}{3}}$

(A) 11. (B) 14. (C) 12. (D) 10.

Ví dụ 3

Biết rằng $3^x = 2$. Tính giá trị của biểu thức $A = 3^{2x-1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} + 9^{x+1}$.

(A) $A = \frac{81}{2}$. (B) $A = 37$. (C) $A = \frac{45}{2}$. (D) $A = 25$.

Ví dụ 4

Tính giá trị của biểu thức $P = \dfrac{(4+2\sqrt{3})^{2016} \cdot (1-\sqrt{3})^{2014}}{(1+\sqrt{3})^{2018}}$.

(A) -2^{2015}. (B) -2^{2017}. (C) 2^{2014}. (D) 2^{2016}.

Ví dụ 5

Cho $4^x + 4^{-x} = 14$. Khi đó biểu thức $M = \dfrac{2 + 2^x + 2^{-x}}{7 - 2^x - 2^{-x}}$ có giá trị bằng

(A) $\frac{1}{2}$. (B) 3. (C) $\frac{3}{2}$. (D) 2.

Dạng 2 Rút gọn biểu thức liên quan đến lũy thừa

- Biến đổi về **cùng cơ số** hoặc **cùng số mũ**;
- Chú ý công thức $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

Ví dụ 1

Cho α là một số thực dương. Viết $\alpha^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\alpha}$ dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỷ.

(A) $\alpha^{\frac{7}{3}}$. (B) $\alpha^{\frac{7}{6}}$. (C) $\alpha^{\frac{5}{3}}$. (D) $\alpha^{\frac{1}{3}}$.

Ví dụ 2

Rút gọn biểu thức $P = x^{\frac{1}{6}}\sqrt[3]{x}$ với $x > 0$.

(A) $P = x^{\frac{1}{8}}$. (B) $P = x^{\frac{2}{9}}$. (C) $P = \sqrt{x}$. (D) $P = x^2$.

Ví dụ 3

Cho đẳng thức $\frac{\sqrt[3]{a^2\sqrt{a}}}{a^3} = a^{\alpha}, 0 < a \neq 1$. Khi đó α thuộc khoảng nào?

(A) $(-1;0)$. (B) $(0;1)$. (C) $(-2;-1)$. (D) $(-3;-2)$.

Ví dụ 4

Cho biểu thức $P = \frac{a^{\sqrt{7}+1}a^{2-\sqrt{7}}}{(a^{\sqrt{2}-2})^{\sqrt{2}+2}}$ với $a > 0$. Rút gọn biểu thức P được kết quả

(A) $P = a^3$. (B) $P = a^5$. (C) $P = a$. (D) $P = a^4$.

Ví dụ 5

Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sqrt[3]{a^8} \cdot a^{\frac{7}{3}}}{a^5 \cdot \sqrt[4]{a^{-3}}}$ $(a > 0)$, ta được kết quả $A = a^{\frac{m}{n}}$, trong đó $m, n \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) $3m^2 - 2n = 0$. (B) $m^2 + n^2 = 25$. (C) $m^2 - n^2 = 25$. (D) $2m^2 + n^2 = 10$.

Ví dụ 6

Cho hai số thực dương a và b. Rút gọn biểu thức $A = \frac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt{b} + b^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}}$.

(A) $A = \sqrt[6]{ab}$. (B) $A = \sqrt[3]{ab}$. (C) $A = \frac{1}{\sqrt[3]{ab}}$. (D) $A = \frac{1}{\sqrt[6]{ab}}$.

Ví dụ 7

Biểu thức thu gọn của $P = \left(\dfrac{a^{\frac{1}{2}}+2}{a+2a^{\frac{1}{2}}+1} - \dfrac{a^{\frac{1}{2}}-2}{a-1} \right) . \dfrac{a^{\frac{1}{2}}+1}{a^{\frac{1}{2}}}$ (với $a > 0, a \neq \pm 1$) có dạng $P = \dfrac{m}{a+n}$. Tính $m-n$.

(A) -1. (B) 1. (C) -3. (D) 3.

Dạng 3 So sánh hai lũy thừa

☑ **So sánh hai lũy thừa**: Cho cơ số $a > 0$ và hai số thực x, y. Khi đó, ta có:

① Nếu $a > 1$ thì $a^x > a^y \Leftrightarrow x > y$. ② Nếu $0 < a < 1$ thì $a^x > a^y \Leftrightarrow x < y$.

☑ **Chú ý**: Ta có thể sử dụng chiều ngược lại.

① Nếu $a^x > a^y$ và $x > y$ thì $a > 1$. ② Nếu $a^x > a^y$ và $x < y$ thì $0 < a < 1$.

Ví dụ 1

Cho $\pi^\alpha > \pi^\beta$ với $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

(A) $\alpha > \beta$. (B) $\alpha < \beta$. (C) $\alpha = \beta$. (D) $\alpha \leq \beta$.

Ví dụ 2

Cho $\left(\sqrt{2}-1\right)^m < \left(\sqrt{2}-1\right)^n$. Khi đó

(A) $m > n$. (B) $m \neq n$. (C) $m < n$. (D) $m = n$.

Ví dụ 3

Tìm điều kiện của m để $(m-1)^{-2\sqrt{3}} > (m-1)^{-3\sqrt{2}}$.

(A) $0 < m < 1$. (B) $m > 1$. (C) $1 < m < 2$. (D) $m > 2$.

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BẢNG TÔ ĐÁP ÁN TỰ LUYỆN

Học sinh làm BTTL xong, tô phương án đúng. Buổi học sau, cùng với GV kiểm tra kết quả.

1	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	7	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	13	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	19	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	25	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
2	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	8	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	14	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	20	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	26	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
3	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	9	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	15	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	21	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	27	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
4	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	10	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	16	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	22	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	28	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
5	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	11	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	17	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	23	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	29	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
6	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	12	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	18	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	24	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	30	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

Câu 1

Mệnh đề nào sau đây **sai**?

Ⓐ $\sqrt[3]{-27}=-3$. Ⓑ $(-8)^{\frac{1}{3}}=-2$. Ⓒ $6^{\frac{1}{2}}.24^{\frac{3}{2}}=288$. Ⓓ $\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}=3$.

Câu 2

Cho a là số thực dương. Đẳng thức nào sau đây đúng?

Ⓐ $a^{x+y}=a^x+a^y$. Ⓑ $(a^x)^y=a^{xy}$. Ⓒ $(a^x)^y=a^x.a^y$. Ⓓ $a^{x-y}=a^x-a^y$.

Câu 3

Điều nào sau đây đúng?

Ⓐ $a^m<a^n\Leftrightarrow m<n$.
Ⓑ Nếu $a<b$ thì $a^m<a^n\Leftrightarrow m>0$.
Ⓒ $a^m>a^n\Leftrightarrow m>n$.
Ⓓ $0<a<1, a^m>a^n\Leftrightarrow m<n$.

Câu 4

Cho a,b là các số thực dương khác 1 và x,y là các số thực. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

Ⓐ $a^xa^y=a^{x+y}$. Ⓑ $\frac{a^x}{a^y}=a^{\frac{x}{y}}$. Ⓒ $a^xb^y=(ab)^{x+y}$. Ⓓ $(a^x)^y=a^{x+y}$.

Câu 5

Tìm số nhỏ hơn 1 trong các số sau:

Ⓐ $(0,7)^{2017}$. Ⓑ $(0,7)^{-2017}$. Ⓒ $(1,7)^{2017}$. Ⓓ $(2,7)^{2017}$.

Câu 6

Cho $(0,25\pi)^{\alpha}>(0,25\pi)^{\beta}$. Kết luận nào sau đây đúng?

Ⓐ $\alpha\cdot\beta=1$. Ⓑ $\alpha>\beta$. Ⓒ $\alpha+\beta=0$. Ⓓ $\alpha<\beta$.

Câu 7

Tính giá trị biểu thức $A = \dfrac{6^{3+\sqrt{5}}}{2^{2+\sqrt{5}} \cdot 3^{1+\sqrt{5}}}$.

(A) 1. (B) $6^{-\sqrt{5}}$. (C) 18. (D) 9.

Câu 8

Giả sử a là số thực dương, khác 1. Biểu thức $\sqrt{a\sqrt[3]{a}}$ được viết dưới dạng a^{α}. Khi đó giá trị α bằng bao nhiêu?

(A) $\alpha = \dfrac{2}{3}$. (B) $\alpha = \dfrac{11}{6}$. (C) $\alpha = \dfrac{1}{6}$. (D) $\alpha = \dfrac{5}{3}$.

Câu 9

Cho $x > 0$. Biểu thức $P = x\sqrt[5]{x}$ bằng

(A) $x^{\frac{11}{10}}$. (B) $x^{\frac{6}{5}}$. (C) $x^{\frac{1}{5}}$. (D) $x^{\frac{4}{5}}$.

Câu 10

Rút gọn biểu thức $P = x^{\frac{1}{3}} . \sqrt[6]{x}$ với $x > 0$.

(A) $P = x^{\frac{1}{8}}$. (B) $P = x^2$. (C) $P = \sqrt{x}$. (D) $P = x^{\frac{2}{3}}$.

Câu 11

Rút gọn biểu thức $Q = \dfrac{b^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[5]{b}}$ với $b > 0$.

(A) $Q = b^{\frac{1}{15}}$. (B) $Q = b^{-\frac{2}{15}}$. (C) $Q = b^{\frac{2}{15}}$. (D) $Q = b^{\frac{5}{3}}$.

Câu 12

Biến đổi $\sqrt[3]{x^5 . \sqrt[4]{x}}, (x > 0)$ thành dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ ta được

(A) $x^{\frac{20}{3}}$. (B) $x^{\frac{23}{12}}$. (C) $x^{\frac{21}{12}}$. (D) $x^{\frac{12}{5}}$.

Câu 13

Viết biểu thức $A = \sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}} : a^{\frac{11}{6}}$ $(a > 0)$ dưới dạng số mũ lũy thừa hữu tỉ.

(A) $A = a^{-\frac{23}{24}}$. (B) $A = a^{\frac{21}{24}}$. (C) $A = a^{\frac{23}{24}}$. (D) $A = a^{-\frac{1}{12}}$.

Câu 14

Cho biểu thức $P = \sqrt[3]{x^2\sqrt{x^5\sqrt[5]{x^3}}} : x^3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $P = x^{\frac{14}{15}}$. (B) $P = x^{\frac{31}{15}}$. (C) $P = x^{-\frac{7}{5}}$. (D) $P = x^{-\frac{14}{15}}$.

Câu 15

Hãy viết biểu thức $L = \sqrt[3]{7.\sqrt[3]{7}}$ dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ.

(A) $7^{\frac{1}{2}}$. (B) $7^{\frac{1}{18}}$. (C) $7^{\frac{4}{9}}$. (D) $7^{\frac{1}{27}}$.

Câu 16

Rút gọn biểu thức $Q = b^{\frac{5}{3}} : \sqrt[3]{b}$ với $b > 0$.

(A) $Q = b^2$. (B) $Q = b^{\frac{5}{9}}$. (C) $Q = b^{-\frac{4}{3}}$. (D) $Q = b^{\frac{4}{3}}$.

Câu 17

Rút gọn biểu thức $P = \dfrac{x^{\frac{1}{3}}\sqrt[6]{x^5}}{x\sqrt{x}}$ với $x > 0$.

(A) $P = \sqrt{x}$. (B) $P = x^{-\frac{1}{3}}$. (C) $P = \sqrt[3]{x^2}$. (D) $P = x^{-\frac{2}{3}}$.

Câu 18

Tính giá trị của biểu thức $L = \left(\sqrt{11} - 2\sqrt{3}\right)^{2017}\left(\sqrt{11} + 2\sqrt{3}\right)^{2016}$.

(A) $L = \sqrt{11} + 2\sqrt{3}$. (B) $L = \left(\sqrt{11} - 2\sqrt{3}\right)^{2016}$.
(C) $L = \left(\sqrt{11} + 2\sqrt{3}\right)^{2016}$. (D) $L = \sqrt{11} - 2\sqrt{3}$.

Câu 19

Cho biểu thức $P = \sqrt[5]{x^3\sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}}$ với $x > 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $P = x^{\frac{23}{30}}$. (B) $P = x^{\frac{37}{15}}$. (C) $P = x^{\frac{53}{30}}$. (D) $P = x^{\frac{31}{10}}$.

Câu 20

Cho $a^{2b} = 5$. Tính $2.a^{6b}$.

(A) 120. (B) 250. (C) 15. (D) 125.

Câu 21

Cho hai số dương a và b thỏa mãn $a^{\frac{1}{2}} = 3$, $b^{\frac{1}{3}} = 2$. Tính giá trị của tổng $S = a + b$.

(A) 5. (B) 13. (C) 17. (D) 31.

Câu 22

Biết $2^x + 2^{-x} = m$ với $m \geq 2$. Tính giá trị của biểu thức $M = 4^x + 4^{-x}$.

(A) $M = m - 2$. (B) $M = m^2 + 2$. (C) $M = m^2 - 2$. (D) $M = m + 2$.

Câu 23

Nếu $(a-2)^{-\frac{1}{4}} \leq (a-2)^{-\frac{1}{3}}$ thì khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $a > 3$. (B) $a < 3$. (C) $2 < a < 3$. (D) $a > 2$.

Câu 24

Cho $a > 1 > b > 0$, khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $a^2 < b^2$. (B) $a^{-\sqrt{3}} < b^{-\sqrt{3}}$. (C) $b^{-2} > b^{-e}$. (D) $a^{-2} < a^{-3}$.

Câu 25

Cho $(a+1)^{-\frac{2}{3}} < (a+1)^{-\frac{1}{3}}$. Kết luận nào sau đây đúng?

(A) $a > 0$. (B) $-1 < a < 0$. (C) $a \geq -1$. (D) $a \geq 0$.

Câu 26

Biết biểu thức $P = \dfrac{a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}} - a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2}}$ có thu gọn là $a^m b^n$ (với $a, b > 0$ và m, n là các số hữu tỉ). Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $m - 2n = 0$. (B) $m + n = 0$. (C) $2m - 3n = 0$. (D) $m - n = 0$.

Câu 27

Cho $x > 0, y > 0$ và biểu thức $K = \left(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}\right)^2 . \left(1 - 2\sqrt{\dfrac{y}{x} + \dfrac{y}{x}}\right)^{-1}$. Hãy xác định mệnh đề đúng.

(A) $K = 2x$. (B) $K = x + 1$. (C) $K = x - 1$. (D) $K = x$.

Câu 28

Tích $(2017!)\left(1+\dfrac{1}{1}\right)^1\left(1+\dfrac{1}{2}\right)^2 \cdots \left(1+\dfrac{1}{2017}\right)^{2017}$ được viết dưới dạng a^b, khi đó $(a;b)$ là cặp nào trong các cặp sau?

(A) $(2018;2017)$. (B) $(2019;2018)$. (C) $(2015;2014)$. (D) $(2016;2015)$.

Câu 29

Bạn Nam là học sinh của một trường đại học, Nam muốn vay ngân hàng với lãi xuất ưu đãi để trang trải việc học tập hàng năm. Đầu mỗi năm học Nam vay ngân hàng số tiền 10 triệu đồng với lãi xuất hàng năm là 4%. Tính số tiền mà Nam nợ ngân hàng sau 4 năm biết rằng trong 4 năm đó ngân hàng không thay đổi lãi suất (kết quả làm tròn đến nghìn đồng).

(A) 46.794.000 đồng. (B) 44.163.000 đồng. (C) 42.465.000 đồng. (D) 41.600.000 đồng.

Câu 30

Tính đến đầu năm 2011, dân số toàn thành phố A đạt xấp xỉ 905.300 người. Mỗi năm dân số thành phố tăng thêm 1,37%. Để thành phố A thực hiện tốt chủ trương 100% trẻ em đúng độ tuổi đều vào lớp 1 thì đến năm học 2024 – 2025 số phòng học cần chuẩn bị cho học sinh lớp 1 (mỗi phòng 35 học sinh) gần nhất với số nào sau đây; biết rằng sự di cư đến, đi khỏi thành phố và số trẻ tử vong trước 6 tuổi đều không đáng kể, ngoài ra trong năm sinh của lứa học sinh lớp 1 đó toàn thành phố có 2400 người chết?

(A) 322. (B) 321. (C) 459. (D) 458.

——HẾT——

§2. HÀM SỐ LŨY THỪA

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Khái niệm

☑ Hàm số $y = x^\alpha$, với $\alpha \in \mathbb{R}$ được gọi là hàm lũy thừa.

☑ Điều kiện xác định của hàm $y = x^\alpha$ tùy thuộc vào α, cụ thể như sau:

① α nguyên dương, khi đó x tùy ý.

② α nguyên âm hoặc bằng 0, khi đó $x \neq 0$.

③ α không nguyên, khi đó $x > 0$.

☑ Công thức đạo hàm:

① $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$;

② Hàm hợp: $(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$.

2. Đồ thị hàm lũy thừa

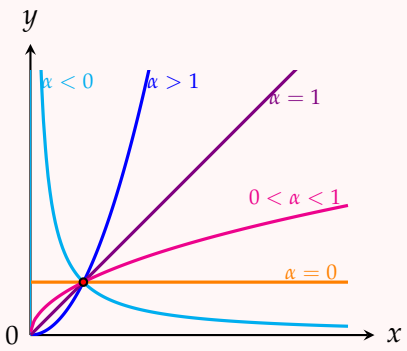
☑ Xét đồ thị hàm số $y = x^\alpha$ trên khoảng $(0; +\infty)$. Khi đó:

① Nếu $\alpha > 0$ và $\alpha \neq 1$ thì hàm số đồng biến.

② Nếu $\alpha = 1$ thì hàm số có đồ thị là đường thẳng.

③ Nếu $\alpha = 0$ thì hàm số là hàm hằng.

④ Nếu $\alpha < 0$ hàm số thì hàm số nghịch biến.



☑ Đồ thị hàm số $y = x^\alpha$ luôn đi qua điểm $(1; 1)$

B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1 Tìm tập xác định của hàm số lũy thừa

Xét hàm số dạng $y = [f(x)]^\alpha$, với α là số thực cho trước. Để tìm tập xác định của hàm số này, tùy thuộc vào số mũ α ta có ba trường hợp sau:

① Nếu α nguyên dương ($\alpha = 1; 2; ...$) thì ta chỉ cần tìm điều kiện để $f(x)$ có nghĩa.

② Nếu α nguyên âm hoặc bằng 0 ($\alpha = ...; -2; -1; 0$) thì $f(x) \neq 0$.

③ Nếu α không nguyên ($\alpha = \frac{1}{2}; \sqrt{2}; ...$) thì $f(x) > 0$.

Ví dụ 1

Tập xác định của hàm số $y = x^{\sqrt{2}}$ là

(A) $\mathbb{R}$. (B) $(0;+\infty)$. (C) $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. (D) $[0;+\infty)$.

Ví dụ 2

Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = \left(x^2-1\right)^{-2}$.

(A) $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. (B) $\mathscr{D} = (-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.
(C) $\mathscr{D} = (-1;1)$. (D) $\mathscr{D} = \mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$.

Ví dụ 3

Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = (x^2+x-2)^{-3}$.

(A) $\mathscr{D} = \mathbb{R}\setminus\{-2;1\}$. (B) $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
(C) $\mathscr{D} = (0;+\infty)$. (D) $\mathscr{D} = (-\infty;-2)\cup(1;+\infty)$.

Ví dụ 4

Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = (2x-1)^{\pi}$.

(A) $\mathscr{D} = \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$. (B) $\mathscr{D} = \left[\frac{1}{2};+\infty\right)$. (C) $\mathscr{D} = \left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. (D) $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ví dụ 5

Tập xác định của hàm số $y = (x+2)^{\frac{3}{2}} - \sqrt{3-x}$ là

(A) $\mathscr{D} = (-2;3]$. (B) $\mathscr{D} = (-2;3)$.
(C) $\mathscr{D} = (-2;+\infty)\setminus\{3\}$. (D) $\mathscr{D} = (-2;+\infty)$.

Ví dụ 6

Tập xác định của hàm số $y = (4-x^2)^{\frac{1}{3}}$ là

(A) $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$. (B) $(-2;2)$.
(C) $(-\infty;-2)$. (D) $\mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$.

Ví dụ 7

Tìm tập xác định của hàm số $y = \left[x^2(x+3)\right]^{\sqrt{3}}$.

(A) $\mathscr{D} = (-\infty;+\infty)$. (B) $\mathscr{D} = (-3;+\infty)$.
(C) $\mathscr{D} = (0;+\infty)$. (D) $\mathscr{D} = (-3;+\infty)\setminus\{0\}$.

Ví dụ 8

Tìm tập xác định của hàm số $y = (1-\sin x)^{\sqrt{3}}$.

(A) $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. (B) $\mathscr{D} = \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

(C) $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$. (D) $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$.

Ví dụ 9

Tìm tập xác định của hàm số $y=(1+\sqrt{x-1})^{\sqrt{5}}$.

(A) $\mathscr{D}=[1;+\infty)$. (B) $\mathscr{D}=(0;+\infty)$. (C) $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. (D) $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Ví dụ 10

Cho hàm số $y=\left(x^2-2x-m+1\right)^{\sqrt{2020}}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc $(-2020;2020)$ để hàm số có tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$?

(A) 2018. (B) 2019. (C) 2020. (D) 2021.

Ví dụ 11

Cho hàm số $y=\left(\sqrt{m^2x^4-mx^2+20x-m^2+m+20}\right)^{2021}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in(-2020;2020)$ để hàm số có tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$?

(A) 1. (B) 2. (C) 2020. (D) 2021.

Dạng 2 Tìm đạo hàm của hàm số lũy thừa

Cho $\alpha\in\mathbb{R}$. Ta có các công thức sau:

① $\left(x^\alpha\right)'=\alpha x^{\alpha-1}$. ② Hàm hợp: $\left(u^\alpha\right)'=\alpha u^{\alpha-1}\cdot u'$.

③ $\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. ④ $\left(\sqrt[n]{x}\right)'=\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$.

Ví dụ 1

Tính đạo hàm của hàm số $y=x^{\frac{1}{3}}$ tại điểm $x=-8$.

(A) $\frac{1}{21}$. (B) $-\frac{1}{12}$. (C) Không tồn tại. (D) $\frac{1}{12}$.

Ví dụ 2

Tìm đạo hàm của hàm số $y=x^{\frac{2}{3}}$.

(A) $y'=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$. (B) $y'=\frac{2}{3}x$. (C) $y'=\frac{2}{3}\sqrt[3]{x}$. (D) $y'=\frac{2}{3x^3}$.

Ví dụ 3

Cho hàm số $f(x)=k\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}$ với $k\in\mathbb{R}$. Tìm k để $f'(1)=\frac{3}{2}$.

(A) $k=3$. (B) $k=1$. (C) $k=\frac{9}{2}$. (D) $k=-3$.

Ví dụ 4

Đạo hàm của hàm số $y=(1+3x)^{\frac{1}{3}}$ là

(A) $y'=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(1+3x)^2}}$.
(B) $y'=-\dfrac{1}{\sqrt[3]{(1+3x)^2}}$.
(C) $y'=\dfrac{1}{\sqrt[3]{(1+3x)^2}}$.
(D) $y'=\dfrac{3}{\sqrt[3]{(1+3x)^2}}$.

Ví dụ 5

Đạo hàm của hàm số $y=(x^2+x+1)^{\frac{1}{3}}$ là

(A) $y'=\dfrac{2x+1}{3\sqrt[3]{(x^2+x+1)^2}}$.
(B) $y'=\dfrac{2x+1}{3\sqrt[3]{x^2+x+1}}$.
(C) $\dfrac{1}{3}(x^2+x+1)^{-\frac{2}{3}}$.
(D) $\dfrac{1}{3}(x^2+x+1)^{\frac{2}{3}}$.

Ví dụ 6

Số điểm cực trị của hàm số $y=x^{2017}(x+1)$ là

(A) 2017.
(B) 2.
(C) 1.
(D) 0.

Ví dụ 7

Hàm số $y=x-3\sqrt[3]{x^2}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 2.
(B) 0.
(C) 1.
(D) 8.

Dạng 3 Đồ thị của hàm số lũy thừa

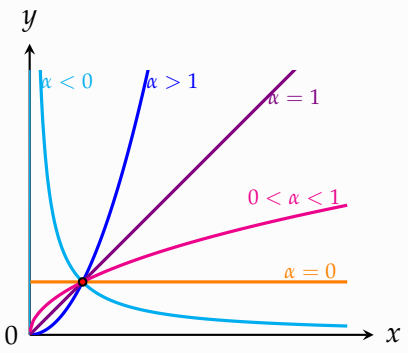
☑ Xét đồ thị hàm số $y=x^{\alpha}$ trên khoảng $(0;+\infty)$. Khi đó:

① Nếu $\alpha>0$ và $\alpha\neq 1$ thì hàm số đồng biến.

② Nếu $\alpha=1$ thì hàm số có đồ thị là đường thẳng.

③ Nếu $\alpha=0$ thì hàm số là hàm hằng.

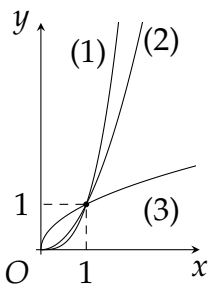
④ Nếu $\alpha<0$ hàm số thì hàm số nghịch biến.



☑ Đồ thị hàm số $y=x^{\alpha}$ luôn đi qua điểm $(1;1)$

Ví dụ 1

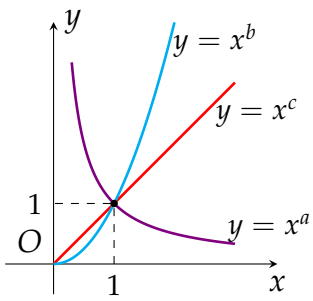
Cho các hàm số lũy thừa $y = x^a, y = x^b, y = x^c$ có đồ thị là các đường (1), (2), (3) như hình vẽ. Chọn khẳng định đúng.



(A) $c < b < a$.
(B) $a < b < c$.
(C) $c < a < b$.
(D) $a < c < b$.

Ví dụ 2

Cho đồ thị các hàm số $y = x^a$, $y = x^b$, $y = x^c$ trên miền $(0; +\infty)$ (hình vẽ bên cạnh). Chọn khẳng định đúng.



(A) $a > b > c$.
(B) $b > c > a$.
(C) $c > b > a$.
(D) $a > c > b$.

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BẢNG TÔ ĐÁP ÁN TỰ LUYỆN

Học sinh làm BTTL xong, tô phương án đúng. Buổi học sau, cùng với GV kiểm tra kết quả.

1	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	7	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	13	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	19	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	25	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
2	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	8	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	14	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	20	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	26	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
3	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	9	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	15	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	21	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	27	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
4	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	10	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	16	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	22	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	28	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
5	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	11	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	17	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	23	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	29	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
6	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	12	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	18	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	24	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	30	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

Câu 1

Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y=x^{2017}$.

Ⓐ $(-\infty;0)$. Ⓑ $\mathbb{R}$. Ⓒ $(0;+\infty)$. Ⓓ $[0;+\infty)$.

Câu 2

Tìm tập xác định của hàm số $y=x^{\frac{2}{3}}$.

Ⓐ $[0;+\infty)$. Ⓑ $(0;+\infty)$. Ⓒ $(-\infty;0)$. Ⓓ $\mathbb{R}$.

Câu 3

Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y=(x^2+1)^{-2}$.

Ⓐ $(-\infty;0)$. Ⓑ $\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}$. Ⓒ $[0;+\infty)$. Ⓓ $\mathbb{R}$.

Câu 4

Tập xác định của hàm số $y=\left(x^2+x-12\right)^{-3}$ là

Ⓐ $\mathscr{D}=(-4;3)$. Ⓑ $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-4;3\}$.

Ⓒ $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus(-4;3)$. Ⓓ $\mathscr{D}=(-\infty;-4)\cup(3;+\infty)$.

Câu 5

Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y=(x-1)^{\frac{1}{2}}$.

Ⓐ $\mathscr{D}=[1;+\infty)$. Ⓑ $\mathscr{D}=(1;+\infty)$. Ⓒ $\mathscr{D}=(-\infty;1)$. Ⓓ $\mathscr{D}=(0;1)$.

Câu 6

Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y=\left(x^2-3x+2\right)^{-\frac{1}{3}}$.

Ⓐ $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$. Ⓑ $\mathscr{D}=(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$.

Ⓒ $\mathscr{D}=(1;2)$. Ⓓ $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Câu 7

Tìm đạo hàm của hàm số $y=(5-x)^{\sqrt{3}}$.

(A) $y'=-(5-x)^{\sqrt{3}}\ln|5-x|$.

(B) $y'=\dfrac{\sqrt{3}(5-x)^{\sqrt{3}}}{x-5}$.

(C) $y'=\dfrac{\sqrt{3}}{(x-5)^{\sqrt{3}-1}}$.

(D) $y'=\sqrt{3}(5-x)^{\sqrt{3}-1}$.

Câu 8

Tập xác định của hàm số $y=\left(x^2+1\right)^{-25}$ là

(A) $\mathbb{R}$. (B) $(1;+\infty)$. (C) $(0;+\infty)$. (D) $\mathbb{R}\setminus\pm1$.

Câu 9

Hàm số $y=\left(4-x^2\right)^{\frac{1}{5}}$ có tập xác định là

(A) $(-2;2)$.

(B) $(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$.

(C) $\mathbb{R}$.

(D) $\mathbb{R}\setminus\{\pm2\}$.

Câu 10

Hàm số $y=\left(1-x^2\right)^{\cos(2019\pi)}$ có tập xác định là

(A) $(-1;1)$.

(B) $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

(C) $\mathbb{R}$.

(D) $\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}$.

Câu 11

Tìm tập xác định của hàm số $y=(x-1)^{\frac{1}{3}}$.

(A) $\mathscr{D}=(-\infty;1)$. (B) $\mathscr{D}=(1;+\infty)$. (C) $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. (D) $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Câu 12

Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y=\left(x^2-x-2\right)^{-3}$.

(A) $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

(B) $\mathscr{D}=(0;+\infty)$.

(C) $\mathscr{D}=(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$.

(D) $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-1;2\}$.

Câu 13

Tìm tập xác định của hàm số $y=(1-\cos x)^{\sqrt{2021}}$.

(A) $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

(B) $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$.

(C) $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{k2\pi,k\in\mathbb{Z}\}$.

(D) $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Câu 14

Tập xác định của hàm số $y=\left(x^2+x-2\right)^{-\frac{2}{3}}$ là

(A) $[-2;1]$.
(B) $(-\infty;-2)\cup(1;+\infty)$.
(C) $(-2;1)$.
(D) $(-\infty;-2]\cup[1;+\infty)$.

Câu 15

Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y=(x^2-2x+1)^{\frac{1}{3}}$.

(A) $\mathscr{D}=(0;+\infty)$.
(B) $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.
(C) $\mathscr{D}=(1;+\infty)$.
(D) $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Câu 16

Tập xác định của hàm số $y=\left(x^2-3x+2\right)^{\pi}$ là

(A) $(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$.
(B) $(-\infty;1]\cup[2;+\infty)$.
(C) $(1;2)$.
(D) $\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$.

Câu 17

Tính đạo hàm của hàm số $y=x^{\frac{1}{3}}$.

(A) $y'=\dfrac{1}{3\sqrt{x^3}}$.
(B) $y'=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.
(C) $y'=-\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.
(D) $y'=\dfrac{1}{3}\sqrt[3]{x^4}$.

Câu 18

Cho hàm số $y=\sqrt[3]{2x^2-x+1}$. Tính $f'(0)$.

(A) 4.
(B) 2.
(C) $-\dfrac{1}{3}$.
(D) $\dfrac{1}{3}$.

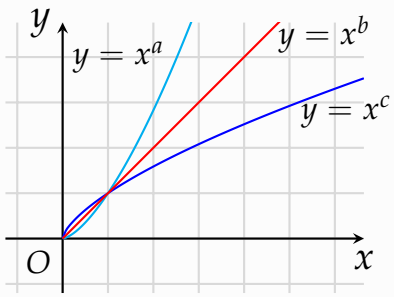
Câu 19

Tính đạo hàm của hàm số $y=\left(2x^2-3x+2\right)^{\frac{1}{3}}$.

(A) $y'=\dfrac{4x-3}{3\sqrt[3]{\left(2x^2-3x+2\right)^2}}$.
(B) $y'=\dfrac{4x-3}{3\sqrt{\left(2x^2-3x+2\right)^2}}$.
(C) $y'=\dfrac{4x-3}{3\sqrt[3]{2x^2-3x+2}}$.
(D) $y'=\dfrac{4x-3}{\sqrt[3]{\left(2x^2-3x+2\right)^2}}$.

Câu 20

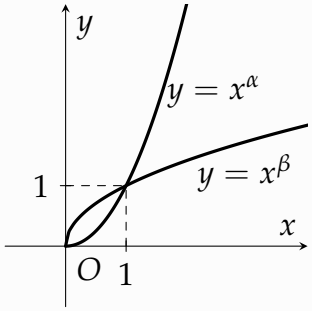
Hình vẽ bên là đồ thị các hàm số $y = x^a$, $y = x^b$, $y = x^c$ trên khoảng $(0; +\infty)$. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.



(A) $a > b > c$.
(B) $a < b < c$.
(C) $b < a < c$.
(D) $c < a < b$.

Câu 21

Cho α, β là các số thực. Đồ thị các hàm số $y = x^\alpha$, $y = x^\beta$ trên khoảng $(0; +\infty)$ được cho trong hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?



(A) $\alpha < 0 < 1 < \beta$.
(B) $\beta < 0 < 1 < \alpha$.
(C) $0 < \alpha < 1 < \beta$.
(D) $0 < \beta < 1 < \alpha$.

Câu 22

Hàm số $y = (x-1)\sqrt[3]{x^2}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 0.

Câu 23

Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 - 2}$. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $f'(x) \le f(x)$.

(A) $S = (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (2; +\infty)$. (B) $S = [-1; 2]$.
(C) $S = (-\infty; -\sqrt{2}) \cup [2; +\infty)$. (D) $S = (-\infty; -\sqrt{2}] \cup [2; +\infty)$.

Câu 24

Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y = \left(x^2 - 2mx + m^2 - 3m\right)^{\frac{1}{5}}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

(A) $m > 0$. (B) $m < 1$. (C) $m > 2$. (D) $m < -1$.

Câu 25

Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $f(x) = (2x^2 + mx + 2)^{\frac{3}{2}}$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$?

(A) 5. (B) 9. (C) 7. (D) 4.

HẾT

§3. LÔGARIT

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Định nghĩa và tính chất

☑ **Định nghĩa:** Cho hai số dương a, b với $a \neq 1$. Số α thỏa mãn đẳng thức $a^\alpha = b$ được gọi là lôgarit cơ số a của b và kí hiệu là $\log_a b$.

$$\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^\alpha = b.$$

☑ **Tính chất:** Cho hai số dương a, b với $a \neq 1$, ta có tính chất sau:

① $\log_a 1 = 0$.
② $\log_a a = 1$.
③ $a^{\log_a b} = b$.
④ $\log_a a^\alpha = \alpha$.

2. Các công thức lôgarit cần nhớ

Cho các số dương $a, b, b_1, b_2, \ldots b_n$ với $a \neq 1$, ta có các quy tắc sau:

☑ **Công thức biến đổi tích thương.**

① $\log_a (b_1 b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$;
② $\log_a (b_1 b_2 \cdots b_n) = \log_a b_1 + \log_a b_2 + \cdots + \log_a b_n$.
③ $\log_a \dfrac{1}{b} = -\log_a b$.
④ $\log_a \left(\dfrac{b_1}{b_2}\right) = \log_a b_1 - \log_a b_2$.

☑ **Công thức biến đổi số mũ.**

① $\log_a b^m = m \cdot \log_a b$.
② $\log_{a^n} b = \dfrac{1}{n} \log_a b$.
③ $\log_{a^n} b^m = \dfrac{m}{n} \log_a b$.
④ $\log_{\frac{1}{a}} b = -\log_a b$; $\log_a \sqrt[n]{b} = \dfrac{1}{n} \log_a b$.

⚠ *Với điều kiện $b \neq 0$ thì* $\log_a b^{2n} = 2n \cdot \log_a |b|$.

☑ **Công thức đổi cơ số.**

① $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$, với $b \neq 1$
② $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$, với $a, b, c > 0$ và $a \neq 1, c \neq 1$
③ $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$, với $a, b, c > 0$ và $a \neq 1, b \neq 1$

3. Lôgarít thập phân và lôgarit tự nhiên

☑ Lôgarit cơ số 10 gọi là lôgarit thập phân.

✔ $\log_{10} N$, $(N > 0)$ được viết là $\log N$ hay $\lg N$.

☑ Lôgarit cơ số e gọi là lôgarit tự nhiên.

✔ $\log_e N$, $(N > 0)$ được viết là $\ln N$.

B CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN

Dạng 1 So sánh hai lôgarit

☑ Khi $a > 1$ thì $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b > c > 0$.

☑ Khi $0 < a < 1$ thì $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow 0 < b < c$.

Ví dụ 1

Mệnh đề nào dưới đây là **sai**?

(A) $\log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{2}} y \Leftrightarrow x > y > 0$.

(B) $\log x > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

(C) $\log_5 x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$.

(D) $\log_4 x^2 > \log_2 y \Leftrightarrow x > y > 0$.

Ví dụ 2

Cho các số thực a, b thỏa mãn $a > b > 1$. Chọn khẳng định **sai**.

(A) $\ln a > \ln b$.

(B) $\log_{\frac{1}{2}} (a.b) < 0$.

(C) $\log_a b > \log_b a$.

(D) $\log_a b < \log_b a$.

Ví dụ 3

Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

(A) $\log_3 5 > 0$.

(B) $\log_{2+x^2} 2016 < \log_{2+x^2} 2017$.

(C) $\log_{0,3} 0{,}8 < 0$.

(D) $\log_3 4 > \log_4 \left(\frac{1}{3}\right)$.

Dạng 2 Công thức, tính toán lôgarit

Ví dụ 1

Giá trị của $a^{8\log_{a^2} 7}, (0 < a \neq 1)$ bằng

(A) 7^4.

(B) 7^2.

(C) 7^{16}.

(D) 7^8.

Ví dụ 2

Tính $P = \log_{2^{2018}} 4 - \dfrac{1}{1009} + \ln \mathrm{e}^{2018}$.

(A) 2000. (B) 1009. (C) 1000. (D) 2018.

Ví dụ 3

Tính giá trị của biểu thức $A = \log_a \frac{1}{a^2}$, với $a > 0$ và $a \neq 1$.

(A) $A = -2$. (B) $A = -\frac{1}{2}$. (C) $A = 2$. (D) $A = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 4

Cho $P = \log_{\frac{1}{a}} \sqrt[3]{a^7}$, với $a > 0$ và $a \neq 1$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

(A) $P = -\frac{7}{3}$. (B) $P = \frac{7}{3}$. (C) $P = \frac{5}{3}$. (D) $P = \frac{2}{3}$.

Ví dụ 5

Cho $\log_a b = 2$ và $\log_a c = 3$. Tính $P = \log_a (b^2 c^3)$.

(A) $P = 31$. (B) $P = 13$. (C) $P = 30$. (D) $P = 108$.

Ví dụ 6

Với điều kiện $a > 0$ và $a \neq 1$, giá trị của $M = \log_a \left(a \sqrt[5]{a \sqrt[3]{a\sqrt{a}}}\right)$ bằng

(A) $\frac{7}{10}$. (B) $\frac{10}{7}$. (C) $\frac{13}{10}$. (D) $\frac{10}{13}$.

Ví dụ 7

Với a, b là các số thực dương tùy ý và a khác 1, đặt $P = \log_a b^3 + \log_{a^2} b^6$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $P = 9 \log_a b$. (B) $P = 27 \log_a b$. (C) $P = 15 \log_a b$. (D) $P = 6 \log_a b$.

Ví dụ 8

Cho a là số thực dương khác 2. Tính $I = \log_{\frac{a}{2}} \left(\frac{a^2}{4}\right)$.

(A) $I = \frac{1}{2}$. (B) $I = 2$. (C) $I = -\frac{1}{2}$. (D) $I = -2$.

Ví dụ 9

Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn $\log_a b = 2$. Tính $\log_{\frac{\sqrt{a}}{b}} \left(\sqrt[3]{b} \cdot a\right)$.

(A) $-\frac{10}{9}$. (B) $\frac{2}{3}$. (C) $\frac{2}{15}$. (D) $-\frac{2}{9}$.

Ví dụ 10

Giá trị của $A = \log_2 3.\log_3 4.\log_4 5...\log_{63} 64$ bằng

(A) 5. (B) 4. (C) 6. (D) 3.

Ví dụ 11

Giá trị của $M = \log_2 2 + \log_2 4 + \log_2 8 + \ldots + \log_2 256$ là

(A) 48. (B) 36. (C) 56. (D) $8 \cdot \log_2 256$.

Ví dụ 12

Cho $\log_a x = 3, \log_b x = 4$ với a, b là các số thực lớn hơn 1. Tính $P = \log_{ab} x$.

(A) $P = \dfrac{7}{12}$. (B) $P = \dfrac{1}{12}$. (C) $P = 12$. (D) $P = \dfrac{12}{7}$.

Ví dụ 13

Cho $a > 0, b > 0$ và $a \neq 1$ thỏa mãn $\log_a b = \dfrac{b}{4}$ và $\log_2 a = \dfrac{16}{b}$. Tính tổng $a + b$.

(A) 16. (B) 12. (C) 10. (D) 18.

Ví dụ 14

Cho ba số $a + \log_2 3, a + \log_4 3, a + \log_8 3$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân. Công bội của cấp số nhân đó bằng

(A) 1. (B) $\dfrac{1}{4}$. (C) $\dfrac{1}{2}$. (D) $\dfrac{1}{3}$.

Dạng 3 Phân tích biểu thức lôgarit theo các lo-ga-rit cho trước

☑ Chú ý công thức đổi cơ số

☑ Bấm máy tính:
Giả sử phân tích (tính) $\log_a X$ theo $\log_b Y$ và $\log_c Z$. Ta thực hiện các thao tác:

① Gán $\log_b Y$ và $\log_c Z$ cho hai biến A, B.

② Bấm $\boxed{\log_a X - \text{ĐÁP ÁN}}$, nếu ĐÁP ÁN nào kết quả là 0 thì ta được phương án đúng.

Ví dụ 1

Biết $\log_{12} 27 = a$. Tính $\log_6 16$ theo a.

(A) $\dfrac{4(3-a)}{3+a}$. (B) $\dfrac{4(3+a)}{3-a}$. (C) $\dfrac{3-a}{4(3+a)}$. (D) $\dfrac{3+a}{4(3-a)}$.

Ví dụ 2

Đặt $\log_2 3 = a; \log_2 5 = b$. Hãy biểu diễn $P = \log_3 240$ theo a và b.

(A) $P=\dfrac{2a+b+4}{a}$. (B) $P=\dfrac{2a-b+3}{a}$. (C) $P=\dfrac{a-b+3}{a}$. (D) $P=\dfrac{a+b+4}{a}$.

Ví dụ 3

Đặt $a=\log_2 3$; $b=\log_3 5$. Biểu diễn $\log_{20}12$ theo a, b.

(A) $\log_{20}12=\dfrac{ab+1}{b-2}$. (B) $\log_{20}12=\dfrac{a+b}{b+2}$. (C) $\log_{20}12=\dfrac{a+2}{ab+2}$. (D) $\log_{20}12=\dfrac{a+1}{b-2}$.

Ví dụ 4

Với $\log_{27}5=a$, $\log_3 7=b$ và $\log_2 3=c$, giá trị của $\log_6 35$ bằng

(A) $\dfrac{(3a+b)c}{1+b}$. (B) $\dfrac{(3a+b)c}{1+c}$. (C) $\dfrac{(3a+b)c}{1+a}$. (D) $\dfrac{(3b+a)c}{1+c}$.

Dạng 4 Xác định một số nguyên dương có bao nhiêu chữ số

☑ Kí hiệu $[X]$ là phần nguyên của số X. Ví dụ $\sqrt{300}=17.320508...$ nên $\left[\sqrt{300}\right]=17$.

☑ Cho A là số nguyên dương. Khi đó số chữ số của A được đếm theo công thức $n=\left[\log A\right]+1$.

Ví dụ 1

Người ta sử dụng $\log x$ để tìm xem một số nguyên dương có bao nhiêu chữ số. Ví dụ số A là số nguyên dương có n chữ số thì $n=\left[\log A\right]+1$ với $[X]$ là phần nguyên của số X . Hỏi $A=2018^{2017}$ có bao nhiêu chữ số?

(A) 6669. (B) 6668. (C) 6666. (D) 6667.

Ví dụ 2

Có 2017^{2018} khi viết thành số tự nhiên có bao nhiêu chữ số?

(A) 6666 chữ số. (B) 6668 chữ số. (C) 6667 chữ số. (D) 6669 chữ số.

Dạng 5 Tổng hợp biến đổi lôgarit nâng cao

Ví dụ 1

Cho $\log_a b=5$. Khi đó giá trị của $\log_{\sqrt{a}}\left(b^4\sqrt[3]{a}\right)$ bằng

(A) $\dfrac{122}{3}$. (B) $\dfrac{131}{6}$. (C) $\dfrac{21}{6}$. (D) $\dfrac{20}{6}$.

Ví dụ 2

Đặt $a=\ln 3$, $b=\ln 5$. Tính $I=\ln\dfrac{3}{4}+\ln\dfrac{4}{5}+\ln\dfrac{5}{6}+\cdots+\ln\dfrac{124}{125}$ theo a và b.

(A) $I=a-2b$. (B) $I=a+3b$. (C) $I=a+2b$. (D) $I=a-3b$.

Ví dụ 3

Với mọi số thực dương a và b thỏa mãn $a^2+b^2=8ab$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $\log(a+b)=\dfrac{1}{2}(\log a+\log b)$. (B) $\log(a+b)=1+\log a+\log b$.

(C) $\log(a+b)=\dfrac{1}{2}(1+\log a+\log b)$. (D) $\log(a+b)=\dfrac{1}{2}+\log a+\log b$.

Ví dụ 4

Cho x,y là các số thực lớn hơn 1 thỏa mãn $x^2+9y^2=6xy$. Tính $M=\dfrac{1+\log_{12}x+\log_{12}y}{2\log_{12}(x+3y)}$.

(A) $M=\dfrac{1}{4}$. (B) $M=1$. (C) $M=\dfrac{1}{2}$. (D) $M=\dfrac{1}{3}$.

Ví dụ 5

Cho a,b,c là các số thực dương khác 1 và thỏa mãn $a^{\log_3 7}=27, b^{\log_7 11}=49, c^{\log_{11}25}=\sqrt{11}$. Tính giá trị của biểu thức $T=a^{\log_3^2 7}+b^{\log_7^2 11}+c^{\log_{11}^2 25}$.

(A) $T=469$. (B) $T=3141$. (C) $T=2017$. (D) $T=76+\sqrt{11}$.

Ví dụ 6

Cho các số thực x, y, z khác 0 thoả mãn $3^x=4^y=12^{-z}$. Tính giá trị của biểu thức $P=xy+yz+zx$.

(A) $P=12$. (B) $P=144$. (C) $P=0$. (D) $P=1$.

Ví dụ 7

Cho x, y là hai số thực dương, $x\neq 1$ thỏa mãn $\log_{\sqrt{x}}y=\dfrac{2y}{5}$, $\log_{\sqrt[3]{5}}x=\dfrac{15}{y}$. Tính giá trị của $P=y^2+x^2$.

(A) $P=17$. (B) $P=50$. (C) $P=51$. (D) $P=40$.

Ví dụ 8

Cho hai số thực dương m, n thỏa mãn $\log_4\left(\dfrac{m}{2}\right)=\log_6 n=\log_9(m+n)$. Tính giá trị của biểu thức $P=\dfrac{m}{n}$.

(A) $P=2$. (B) $P=1$. (C) $P=4$. (D) $P=\dfrac{1}{2}$.

Ví dụ 9

Cho x,y là các số thực dương thỏa mãn $\log_{25}\dfrac{x}{2}=\log_{15}y=\log_9\dfrac{x+y}{4}$ và $\dfrac{x}{y}=\dfrac{-a+\sqrt{b}}{2}$, với a,b là các số nguyên dương. Tính $a+b$.

(A) $a+b=14$. (B) $a+b=3$. (C) $a+b=21$. (D) $a+b=34$.

Ví dụ 10

Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\log u_1 + \sqrt{2 + \log u_1 - 2\log u_{10}} = 2\log u_{10}$ và $u_{n+1} = 2u_n$ với mọi $n \geq 1$. Giá trị nhỏ nhất của n để $u_n > 5^{100}$ bằng

(A) 247. (B) 248. (C) 229. (D) 290.

Ví dụ 11

Cho ba số thực dương x, y, z theo thứ tự lập thành cấp số nhân, đồng thời mỗi số thực dương $a, (a \neq 0)$ thì $\log_a x$, $\log_{\sqrt{a}} y$, $\log_{\sqrt[3]{a}} z$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Tính giá trị của biểu thức $P = \dfrac{1959x}{y} + \dfrac{2019y}{z} + \dfrac{60z}{x}$.

(A) $\dfrac{2019}{2}$. (B) 60. (C) 2019. (D) 4038 .

Ví dụ 12

Cho hai số thực x, y thỏa mãn $\log_4 (x+y) + \log_4 (x-y) \geq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2x - y$.

(A) 4. (B) -4. (C) $2\sqrt{3}$. (D) $\dfrac{10\sqrt{3}}{3}$.

Ví dụ 13

Cho biểu thức $P = \log_{a^3} \dfrac{a^2}{\sqrt{b}} - \log_b a^6$ (với a, b là các số thực dương lớn hơn 1). Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $P_{\min} = -\dfrac{11}{2}$. (B) $P_{\max} = -\dfrac{4}{3}$. (C) $P_{\min} = -\dfrac{4}{3}$. (D) $P_{\max} = -\dfrac{11}{2}$.

Ví dụ 14

Xét các số thực dương x, y thoả $2019^{2(x^2-y+2)} - \dfrac{4x+y+2}{(x+2)^2} = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2y - 4x$.

(A) 2018. (B) 2019. (C) $\dfrac{1}{2}$. (D) 2.

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BẢNG TÔ ĐÁP ÁN TỰ LUYỆN - ĐỀ SỐ 01

Học sinh làm BTTL xong, tô phương án đúng. Buổi học sau, cùng với GV kiểm tra kết quả.

1	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	7	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	13	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	19	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	25	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
2	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	8	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	14	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	20	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	26	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
3	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	9	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	15	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	21	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	27	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
4	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	10	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	16	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	22	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	28	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
5	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	11	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	17	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	23	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	29	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
6	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	12	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	18	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	24	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	30	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

Câu 1

Cho a là số thực dương khác 1. Khẳng định nào dưới đây là sai?

Ⓐ $\log_a 2 \cdot \log_2 a = 1$. Ⓑ $\log_a 1 = 0$.

Ⓒ $\log_a a = 1$. Ⓓ $\log_a 2 = \dfrac{1}{\log_a 2}$.

Câu 2

Cho các số thực $a, b > 1$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

Ⓐ $\log_a \dfrac{a}{b} = \log_b a$. Ⓑ $\log_a \dfrac{a}{b} = 1 + \log_a b$.

Ⓒ $\log_a \dfrac{a}{b} = \log_a b$. Ⓓ $\log_a \dfrac{a}{b} = 1 - \log_a b$.

Câu 3

Cho a là số thực dương tùy ý khác 1. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

Ⓐ $\log_2 a = \log_a 2$. Ⓑ $\log_2 a = \dfrac{1}{\log_2 a}$. Ⓒ $\log_2 a = \dfrac{1}{\log_a 2}$. Ⓓ $\log_2 a = -\log_a 2$.

Câu 4

Với a, b, c là các số thực dương khác 1, mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề **sai**?

Ⓐ $\log_a b = \dfrac{\log b}{\log a}$. Ⓑ $\log_a b = \dfrac{\log_c a}{\log_c b}$. Ⓒ $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$. Ⓓ $\log_a b = \dfrac{\ln b}{\ln a}$.

Câu 5

Cho $a, b > 0$. Tìm mệnh dề đúng trong các mệnh đề sau.

Ⓐ $\ln \dfrac{a}{b} = \ln a + \ln \dfrac{1}{b}$. Ⓑ $\ln \dfrac{a}{b} = \ln b - \ln a$. Ⓒ $\ln \dfrac{a}{b} = \dfrac{\ln a}{\ln b}$. Ⓓ $\ln \dfrac{a}{b} = \ln a - \ln \dfrac{1}{b}$.

Câu 6

Giá trị của biểu thức $A = 4^{\log_2 7}$ bằng

(A) 14. (B) 28. (C) 2. (D) 49.

Câu 7

Biết $\log_6 a = 2 (0 < a \neq 1)$. Tính $I = \log_a 6$.

(A) $I = 36$. (B) $I = \dfrac{1}{2}$. (C) $I = 64$. (D) $I = \dfrac{1}{4}$.

Câu 8

Cho $\log_2 5 = a$. Khi đó $P = \log_4 500$ được tính theo a là

(A) $3a + 2$. (B) $\dfrac{3a+2}{2}$. (C) $2(5a + 4)$. (D) $6a - 2$.

Câu 9

Tính giá trị của biểu thức $I = a \cdot \log_2 \sqrt{8}$.

(A) $I = \dfrac{2}{3}$. (B) $I = \dfrac{3a}{2}$. (C) $I = \dfrac{2a}{3}$. (D) $I = \dfrac{3}{2}$.

Câu 10

Biết rằng $\log_6 \sqrt{a} = 2$. Tính $\log_6 a$.

(A) $\log_6 a = 36$. (B) $\log_6 a = 4$. (C) $\log_6 a = 6$. (D) $\log_6 a = 1296$.

Câu 11

Biết $a = \dfrac{\log_2(\log_2 10)}{\log_2 10}$. Giá trị của 10^a là:

(A) 4. (B) 1. (C) 2. (D) $\log_2 10$.

Câu 12

Tính giá trị của biểu thức $N = \log_a \sqrt{a\sqrt{a}}$ với $0 < a \neq 1$.

(A) $N = \dfrac{-3}{4}$. (B) $N = \dfrac{4}{3}$. (C) $N = \dfrac{3}{2}$. (D) $N = \dfrac{3}{4}$.

Câu 13

Biểu thức $\log_2 \left(2 \sin \dfrac{\pi}{12}\right) + \log_2 \left(2 \cos \dfrac{\pi}{12}\right)$ có giá trị bằng

(A) -2. (B) -1. (C) 1. (D) $\log_2 \sqrt{3} - 1$.

Câu 14

Cho $a > 0, a \neq 1$ giá trị của biểu thức $\log_{\frac{1}{a}} \sqrt[3]{a^7}$ là

(A) $-\frac{3}{7}$. (B) $\frac{7}{3}$. (C) $\frac{3}{7}$. (D) $-\frac{7}{3}$.

Câu 15

Cho $\log_c a = 2$ và $\log_c b = 4$. Tính $P = \log_a b^4$.

(A) $P = 8$. (B) $P = \frac{1}{32}$. (C) $P = \frac{1}{8}$. (D) $P = 32$.

Câu 16

Cho $\log_a b = 5$, $\log_a c = -3$. Giá trị biểu thức $\log_a \left(\frac{a^4 \sqrt[3]{b}}{c^2} \right)$ là

(A) $-\frac{1}{3}$. (B) -40. (C) 40. (D) $\frac{35}{3}$.

Câu 17

Cho $a > 0$ và $a \neq 1$. Giá trị của $a^{\log_{\sqrt{a}} 3}$ bằng?

(A) 9. (B) $\sqrt{3}$. (C) 6. (D) 3.

Câu 18

Cho a, b là hai số thực dương, khác 1. Đặt $\log_a b = 2$, tính giá trị của $P = \log_{a^2} b - \log_{\sqrt{b}} a^3$.

(A) $\frac{13}{4}$. (B) -4. (C) $\frac{1}{4}$. (D) -2.

Câu 19

Biết $\log_2 x = a$, tính theo a giá trị của biểu thức $P = \log_2 4x^2$.

(A) $P = 2 + a$. (B) $P = 4 + 2a$. (C) $P = 4 + a$. (D) $P = 2 + 2a$.

Câu 20

Cho $\log_a x = -1$ và $\log_a y = 4$. Tính giá trị của $P = \log_a (x^2 y^3)$.

(A) $P = -14$. (B) $P = 3$. (C) $P = 10$. (D) $P = 65$.

Câu 21

Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

(A) $\log_{\frac{1}{3}} a > \log_{\frac{1}{3}} b \Leftrightarrow a > b > 0$.
(B) $\log_{\frac{1}{2}} a = \log_{\frac{1}{2}} b \Leftrightarrow a = b > 0$.
(C) $\log_2 x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$.
(D) $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

Câu 22

Nếu $a = \log_{30} 3$ và $b = \log_{30} 5$ thì

(A) $\log_{30} 1350 = a + 2b + 1$.
(B) $\log_{30} 1350 = 2a + b + 1$.
(C) $\log_{30} 1350 = a + 2b + 2$.
(D) $\log_{30} 1350 = 2a + b + 2$.

Câu 23

Cho $\log_2 7 = a$, $\log_3 7 = b$ khi đó $\log_6 7$ bằng

(A) $\dfrac{1}{a+b}$. (B) a^2+b^2. (C) $a+b$. (D) $\dfrac{ab}{a+b}$.

Câu 24

Cho $a = \log_3 15$, $b = \log_3 10$. Tính $\log_{\sqrt{3}} 50$ theo a và b.

(A) $\log_{\sqrt{3}} 50 = 2(a+b-1)$. (B) $\log_{\sqrt{3}} 50 = 4(a+b+1)$.

(C) $\log_{\sqrt{3}} 50 = a+b-1$. (D) $\log_{\sqrt{3}} 50 = 3(a+b+1)$.

Câu 25

Cho $\log_2 6 = a; \log_2 7 = b$. Tính $\log_3 7$ theo a và b.

(A) $\log_3 7 = \dfrac{b}{a-1}$. (B) $\log_3 7 = \dfrac{a}{b-1}$. (C) $\log_3 7 = \dfrac{b}{1-a}$. (D) $\log_3 7 = \dfrac{a}{1-b}$.

Câu 26

Đặt $a = \ln 2; b = \ln 5$. Hãy biểu diễn $I = \ln\dfrac{1}{2} + \ln\dfrac{2}{3} + ... + \ln\dfrac{98}{99} + \ln\dfrac{99}{100}$ theo a và b.

(A) $I = -2(a+b)$. (B) $I = 2(a+b)$. (C) $I = -2(a-b)$. (D) $I = 2(a-b)$.

Câu 27

Đặt $a = \log_{12} 6$, $b = \log_{12} 7$. Hãy biểu diễn $\log_2 7$ theo a và b.

(A) $\dfrac{b}{a+1}$. (B) $\dfrac{b}{1-a}$. (C) $\dfrac{a}{b-1}$. (D) $\dfrac{a}{b+1}$.

Câu 28

Cho $a = \log_2 5, b = \log_3 5$. Tính $\log_{24} 600$ theo a, b

(A) $\log_{24} 600 = \dfrac{2ab+a-3b}{a+3b}$. (B) $\log_{24} 600 = \dfrac{2+a+b}{a+b}$.

(C) $\log_{24} 600 = \dfrac{2ab+a+3b}{a+3b}$. (D) $\log_{24} 600 = \dfrac{2ab+1}{3a+b}$.

Câu 29

Năm 1992, người ta đã biết số $p = 2^{756839} - 1$ là một số nguyên tố (số nguyên tố lớn nhất được biết đến cho đến lúc đó). Hãy tìm số các chữ số của p khi viết trong hệ thập phân.

(A) 227830 chữ số. (B) 227834 chữ số. (C) 227832 chữ số. (D) 227831 chữ số.

Câu 30

Số chữ số của số tự nhiên 3^{2017} là

(A) 962. (B) 963. (C) 964. (D) 961.

——HẾT——

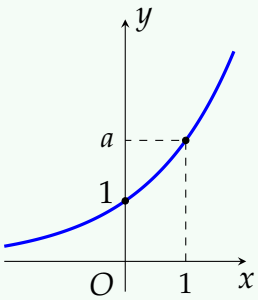
§4. HÀM SỐ MŨ, HÀM SỐ LÔGARIT

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

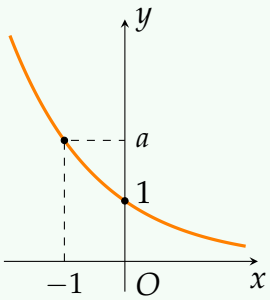
1. Hàm số mũ

Hàm số mũ

- Dạng: $y = a^x$, trong đó $0 < a \neq 1$.
- Đạo hàm:
  - ① $\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$.
  - ② Hàm hợp: $\left(a^u\right)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$.
  - ③ $\left(e^x\right)' = e^x$.
  - ④ Hàm hợp: $\left(e^u\right)' = u' \cdot e^u$.
- Đồ thị hàm số $y = a^x$:
  - ① Hàm số đồng biến khi $a > 1$.
  - ② Hàm số nghịch biến khi $0 < a < 1$.
  - ③ Đồ thị luôn qua $(0;1)$ và luôn nằm phía trên trục hoành.
  - ④ Đồ thị nhận đường thẳng $y = 0$ làm tiệm cận ngang.



$a > 1$

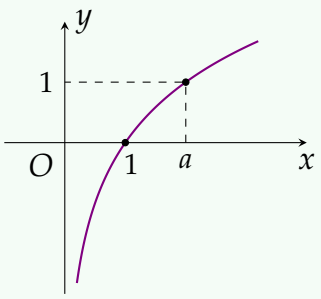


$0 < a < 1$

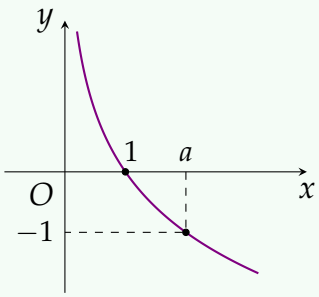
2. Hàm số lôgarit

Hàm số lôgarit

- Dạng: $y = \log_a x$, trong đó $0 < a \neq 1$ và $x > 0$.
- Đạo hàm:
  - ① $\left(\log_a |x|\right)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$, với $x \neq 0$.
  - ② Hàm hợp: $\left(\log_a |u|\right)' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a}$.
  - ③ $\left(\ln |x|\right)' = \dfrac{1}{x}$, với $x \neq 0$.
  - ④ Hàm hợp: $\left(\ln |u|\right)' = \dfrac{u'}{u}$.
- Đồ thị hàm số $y = \log_a x$.
  - ① Hàm số đồng biến khi $a > 1$.
  - ② Hàm số nghịch biến khi $0 < a < 1$.
  - ③ Đồ thị luôn qua $(1;0)$ và luôn nằm bên phải trục tung.
  - ④ Đồ thị nhận đường thẳng $x = 0$ làm tiệm cận đứng.



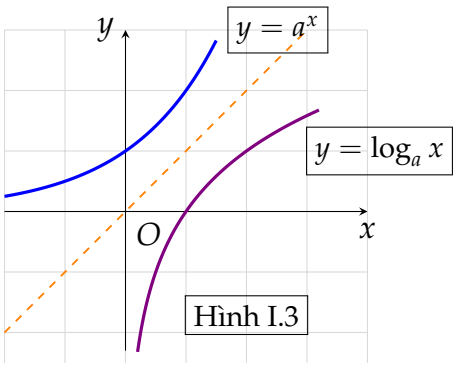
$a > 1$



$0 < a < 1$

3. Liên hệ đồ thị của hai hàm số

Đồ thị hàm số $y = a^x$ và $y = \log_a x$ đối xứng nhau qua đường phân giác của góc phần tư thứ nhất Hình I.3



.

B CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN

Dạng 1 Tìm tập xác định

- ☑ Đối với hàm số $y = a^{u(x)}$: Ta chỉ cần tìm điều kiện để $u(x)$ có nghĩa.
- ☑ Đối với hàm số $y = \log_a u(x)$: Ta tìm điều kiện để $u(x) > 0$.

⚠ ① *Với hàm số* $y = \log_a b^{2n}$, *ta chỉ cần điều kiện* $b \neq 0$.

② *Nếu cơ số a có chứa tham số, ta thêm điều kiện* $0 < a \neq 1$.

Ví dụ 1

Tập xác định của hàm số $y = 7^{x^2+x-2}$ là

(A) $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. (B) $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{1; -2\}$. (C) $\mathscr{D} = (-2; 1)$. (D) $\mathscr{D} = [2; 1]$.

Ví dụ 2

Tập xác định của hàm số $y = 3^{\frac{x+2}{x-1}}$ là

(A) $\mathbb{R}$. (B) $(1; +\infty)$. (C) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. (D) $(-\infty; 1)$.

Ví dụ 3

Tập xác định của hàm số $y=\log_3(2x+1)$ là

(A) $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$. (B) $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$. (C) $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. (D) $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Ví dụ 4

Tập xác định của hàm số $y=\ln(2^x-2)$ là

(A) $\mathscr{D}=(1;+\infty)$. (B) $\mathscr{D}=[-2;2]$. (C) $\mathscr{D}=(2;+\infty)$. (D) $\mathscr{D}=[2;+\infty)$.

Ví dụ 5

Tập xác định của biểu thức $A=\log_{x+1}(2-x)$ là

(A) $(-\infty;2)$. (B) $(-1;2)\setminus\{0\}$. (C) $(-1;2)$. (D) $(-\infty;2)\setminus\{0\}$.

Ví dụ 6

Tập xác định của hàm số $y=\log_6(2x-x^2)$ là

(A) $\mathscr{D}=(0;2)$. (B) $\mathscr{D}=(2;+\infty)$. (C) $\mathscr{D}=(-1;1)$. (D) $\mathscr{D}=(-\infty;3)$.

Ví dụ 7

Tập xác định của hàm số $y=\log_3(2+x)+\log_2(2-x)$ là

(A) $\mathscr{D}=(0;+\infty)$. (B) $\mathscr{D}=[-2;2]$. (C) $\mathscr{D}=(-2;2)$. (D) $\mathscr{D}=[2;+\infty)$.

Ví dụ 8

Tập xác định của hàm số $y=\log(x^3+x^2+3x)$ là

(A) $\mathscr{D}=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$. (B) $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.
(C) $\mathscr{D}=(0;+\infty)$. (D) $\mathscr{D}=[0;+\infty)$.

Ví dụ 9

Hàm số $y=\log_2\dfrac{x+3}{2-x}$ có nghĩa khi và chỉ khi

(A) $x\neq 2$. (B) $x<-3$ hoặc $x>2$.
(C) $-3\leq x<2$. (D) $-3<x<2$.

Ví dụ 10

Hàm số $y=(x^2-16)^{-5}-\ln(24-5x-x^2)$ có tập xác định là

(A) $(-8;-4)\cup(3;+\infty)$. (B) $(-\infty;-4)\cup(3;+\infty)$.
(C) $(-8;3)\setminus\{-4\}$. (D) $(-4;3)$.

Ví dụ 11

Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y=\dfrac{3}{\log_2 x-4}$ là

(A) $\mathscr{D}=(0;+\infty)$.
(B) $\mathscr{D}=\mathbb{R}\backslash\{16\}$.
(C) $\mathscr{D}=(0;16)$.
(D) $\mathscr{D}=(0;16)\cup(16;+\infty)$.

Ví dụ 12

Tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y=\ln x^2$ là

(A) $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.
(B) $\mathscr{D}=(-\infty;0)$.
(C) $\mathscr{D}=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.
(D) $\mathscr{D}=(0;+\infty)$.

Ví dụ 13

Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y=\log_2\left(x^3-8\right)^{1000}$.

(A) $\mathscr{D}=\mathbb{R}\backslash\{2\}$.
(B) $\mathscr{D}=(2;+\infty)$.
(C) $\mathscr{D}=(-\infty;2)$.
(D) $\mathscr{D}=(-2;+\infty)\cup(-\infty;2)$.

Ví dụ 14

Hàm số $y=\ln|1-\sin x|$ có tập xác định là

(A) $\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2}+k2\pi,k\in Z\right\}$.
(B) $\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{3}+k\pi,k\in Z\right\}$.
(C) $\mathbb{R}\backslash\{\pi+k2\pi,k\in Z\}$.
(D) $\mathbb{R}$.

Ví dụ 15

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\ln\left(x^2-2x+m+1\right)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$

(A) $m=0$.
(B) $0<m<3$.
(C) $m<-1$ hoặc $m>0$.
(D) $m>0$.

Ví dụ 16

Tìm tập hợp tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{\log_3\left(x^2-2x+3m\right)}}$ có tập xác định $\mathbb{R}$.

(A) $\left[\dfrac{2}{3};+\infty\right)$.
(B) $\left(\dfrac{2}{3};+\infty\right)$.
(C) $\left(\dfrac{1}{3};+\infty\right)$.
(D) $\left[\dfrac{2}{3};10\right]$.

Dạng 2 Tính đạo hàm

☑ Đạo hàm hàm số $y=a^x$, trong đó $0<a\neq 1$.

① $\left(a^x\right)'=a^x\cdot\ln a$.
② Hàm hợp: $\left(a^u\right)'=u'\cdot a^u\cdot\ln a$.

☑ Đạo hàm hàm số $y=e^x$:

③ $\left(e^x\right)' = e^x$. ④ Hàm hợp: $\left(e^u\right)' = u' \cdot e^u$.

☑ Đạo hàm hàm số: $y = \log_a x$, trong đó $0 < a \neq 1$ và $x > 0$.

① $\left(\log_a |x|\right)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$, với $x \neq 0$. ② Hàm hợp: $\left(\log_a |u|\right)' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a}$.

☑ Đồ thị hàm số $y = \ln x$.

③ $\left(\ln |x|\right)' = \dfrac{1}{x}$, với $x \neq 0$. ④ Hàm hợp: $\left(\ln |u|\right)' = \dfrac{u'}{u}$.

Ví dụ 1

Đạo hàm của hàm số $y = 3^{2x}$ bằng

(A) $y' = 3^{2x}$. (B) $y' = \dfrac{3^{2x}}{\ln 3}$. (C) $y' = 2 \cdot 3^{2x} \ln 3$. (D) $y' = 3^{2x} \cdot \ln 3$.

Ví dụ 2

Tính đạo hàm của hàm số $y = 2^{1-2x}$.

(A) $y' = -2 \cdot 2^{1-2x}$. (B) $y' = 2^{1-2x} \ln 2$. (C) $y' = -2^{2-2x} \ln 2$. (D) $y' = (1-2x)^{-2x}$.

Ví dụ 3

Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_3 x$.

(A) $y' = \dfrac{1}{x \cdot \ln 3}$. (B) $y' = \dfrac{1}{x}$. (C) $y' = \dfrac{1}{x \ln 10}$. (D) $y' = 3^x \cdot \ln 3$.

Ví dụ 4

Đạo hàm của hàm số $y = \log_3(x^2+1)$ là

(A) $y' = \dfrac{2x \ln 3}{x^2+1}$. (B) $y' = \dfrac{\ln 3}{x^2+1}$. (C) $y' = \dfrac{2x}{x^2+1}$. (D) $y' = \dfrac{2x}{(x^2+1)\ln 3}$.

Ví dụ 5

Cho hàm số $f(x) = x \ln^2 x$, ta có $f'(e)$ bằng

(A) 3. (B) $\dfrac{2}{e}$. (C) $2e+1$. (D) $2e$.

Ví dụ 6

Cho hàm số $f(x) = \ln\left(3x - x^2\right)$. Tìm tập nghiệm S của phương trình $f'(x) = 0$.

(A) $S = \varnothing$. (B) $S = \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$.

(C) $S = \{0;3\}$. (D) $S = (-\infty;0) \cup (3;+\infty)$.

Ví dụ 7

Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = x\ln x^2$ tại điểm $x = 4$ có kết quả là $f'(4) = a\ln 2 + b$, với $a, b \in \mathbb{Z}$. Khi đó, giá trị của biểu thức $P = a + 2^b$ bằng bao nhiêu?

(A) $P = 4$. (B) $P = 8$. (C) $P = 10$. (D) $P = 16$.

Ví dụ 8

Cho hàm số $y = \mathrm{e}^x(x^2 + mx)$. Biết $y'(0) = 1$. Tính $y'(1)$.

(A) 5e. (B) 3e. (C) 6e. (D) 4e.

Ví dụ 9

Cho hàm số $f(x) = \ln\dfrac{2018x}{x+1}$. Tính tổng $S = f'(1) + f'(2) + \cdots + f'(2018)$.

(A) $S = \ln 2018$. (B) $S = 1$. (C) $S = 2018$. (D) $S = \dfrac{2018}{2019}$.

Ví dụ 10

Cho hàm số $y = \ln\left(\dfrac{7}{x+7}\right)$. Hệ thức nào sau đây là hệ thức đúng?

(A) $xy' + 7 = -e^y$. (B) $xy' - 1 = e^y$. (C) $xy' + 1 = e^y$. (D) $xy' - 7 = e^y$.

Ví dụ 11

Cho hàm số $y = e^x\cos x$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

(A) $2y' - y'' = 2y$. (B) $2y' - y'' = y$. (C) $y - y' = y''$. (D) $y'' - 2y' = y$.

Dạng 3 Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất

Ví dụ 1

Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = e^{x^3-3x+3}$ trên đoạn $[0;2]$ bằng

(A) e^2. (B) e^3. (C) e^5. (D) e.

Ví dụ 2

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \ln\left(x^2 + x + 2\right)$ trên đoạn $[1;3]$

(A) $\max\limits_{[1;3]} y = \ln 14$. (B) $\max\limits_{[1;3]} y = \ln 12$. (C) $\max\limits_{[1;3]} y = \ln 4$. (D) $\max\limits_{[1;3]} y = \ln 10$.

Ví dụ 3

Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x\,(2 - \ln x)$ trên đoạn $[2;3]$ là

(A) $\max\limits_{[2;3]} y = e$. (B) $\max\limits_{[2;3]} y = -2 + 2\ln 2$.

(C) $\max\limits_{[2;3]} y = 4 - 2\ln 2$. (D) $\max\limits_{[2;3]} y = 1$.

Ví dụ 4

Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{\ln^2 x}{x}$ trên đoạn $[1;e^3]$ là $M=\dfrac{m}{e^n}$, trong đó m,n là các số tự nhiên. Tính $S=m^2+2n^3$.

(A) $S=135$. (B) $S=24$. (C) $S=22$. (D) $S=32$.

Dạng 4 Các bài toán liên quan đến đồ thị

Ví dụ 1

Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào nghịch biến trên tập số thực $\mathbb{R}$.

(A) $y=\log_{\frac{1}{2}} x$. (B) $y=\left(\dfrac{2}{\pi}\right)^x$.

(C) $y=\left(\dfrac{\pi}{3}\right)^x$. (D) $y=\log_{\frac{\pi}{4}}(2x^2+1)$.

Ví dụ 2

Hàm số nào trong bốn hàm số dưới đây đồng biến trên các khoảng xác định của nó?

(A) $y=(\ln 2)^x$. (B) $y=\left(\dfrac{2}{5}\right)^x$.

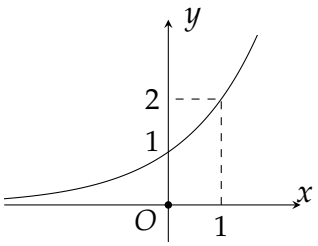
(C) $y=\left(\dfrac{3}{2+\sin 2018}\right)^x$. (D) $y=(\sin 2018)^x$.

Ví dụ 3

Đường cong trong hình sau là đồ thị hàm số nào?

(A) $y=2^x$. (B) $y=\left(\sqrt{2}\right)^x$.

(C) $y=\log_2(2x)$. (D) $y=\dfrac{1}{2}x+1$.

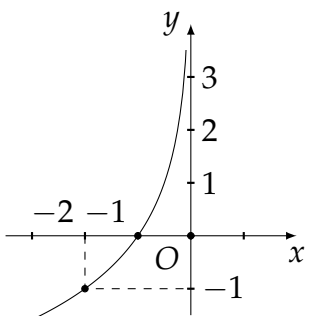


Ví dụ 4

Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào sau đây?

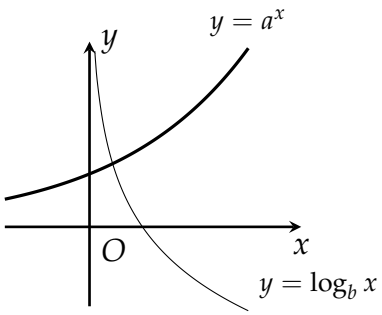
(A) $y=-2^{-x}$. (B) $y=2^{-x}$.

(C) $y=\log_2(-x)$. (D) $y=-\log_2(-x)$.



Ví dụ 5

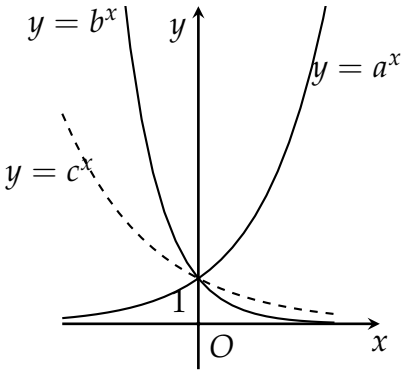
Cho $a > 0, b > 0, a \neq 1, b \neq 1$. Đồ thị hàm số $y = a^x$ và $y = \log_b x$ được xác định như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



(A) $a > 1; 0 < b < 1$.
(B) $0 < a < 1; b > 1$.
(C) $0 < a < 1; 0 < b < 1$.
(D) $a > 1; b > 1$.

Ví dụ 6

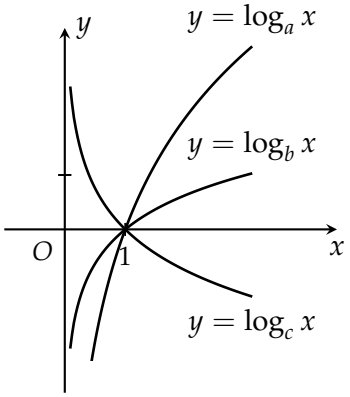
Trên hình vẽ, đồ thị của ba hàm số $y = a^x, y = b^x, y = c^x$ (a, b, c là ba số dương khác 1 cho trước) được vẽ trong cùng một mặt phẳng tọa độ. Dựa vào đồ thị và các tính chất của lũy thừa, hãy so sánh ba số a, b và c.



(A) $c > b > a$.
(B) $b > c > a$.
(C) $a > c > b$.
(D) $a > b > c$.

Ví dụ 7

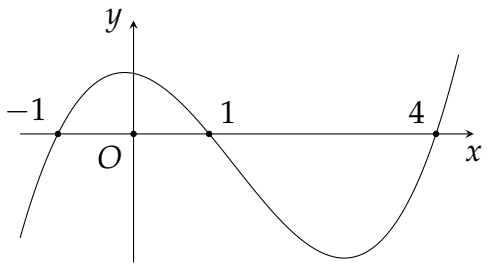
Hình bên là đồ thị của ba hàm số $y = \log_a x$, $y = \log_b x$, $y = \log_c x$ được vẽ trên cùng một hệ trục tọa độ. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?



(A) $a > c > b$.
(B) $b > c > a$.
(C) $b > a > c$.
(D) $a > b > c$.

Ví dụ 8

Cho hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = e^{2f(x)+1} + 5^{f(x)}$.



(A) 1.
(B) 2.
(C) 4.
(D) 3.

Ví dụ 9

Gọi S là tập các giá trị của tham số thực m để hàm số $y=x^2+\ln(x+m+2)$ đồng biến trên tập xác định của nó. Biết $S=\left(-\infty;a+\sqrt{b}\right]$. Tính tổng $K=a+b$ là

(A) $K=-5$. (B) $K=5$. (C) $K=0$. (D) $K=2$.

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BẢNG TÔ ĐÁP ÁN TỰ LUYỆN

Học sinh làm BTTL xong, tô phương án đúng. Buổi học sau, cùng với GV kiểm tra kết quả.

1	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	7	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	13	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	19	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	25	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
2	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	8	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	14	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	20	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	26	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
3	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	9	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	15	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	21	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	27	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
4	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	10	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	16	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	22	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	28	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
5	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	11	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	17	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	23	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	29	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
6	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	12	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	18	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	24	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	30	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

Câu 1

Tập xác định của hàm số $y = \log_3 x$ là

Ⓐ $[0;+\infty)$. Ⓑ $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Ⓒ $\mathbb{R}$. Ⓓ $(0;+\infty)$.

Câu 2

Hàm số nào trong các hàm số sau đây có tập xác định là $\mathbb{R}$?

Ⓐ $y = \log_2 x$. Ⓑ $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$.

Ⓒ $y = \tan x$. Ⓓ $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$.

Câu 3

Tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = \log_{2018}(2x-1)$ là

Ⓐ $\mathscr{D} = (0;+\infty)$. Ⓑ $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. Ⓒ $\mathscr{D} = \left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. Ⓓ $\mathscr{D} = \left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Câu 4

Tìm tập xác định D của hàm số $y = \log_2 \sqrt{6-x}$.

Ⓐ $D = \mathbb{R}\setminus\{6\}$. Ⓑ $D = (-\infty;6)$. Ⓒ $D = (6;+\infty)$. Ⓓ $D = (-\infty;6]$.

Câu 5

Tập xác định của hàm số $y = \ln|4-x^2|$ là

Ⓐ $\mathbb{R}\setminus[-2;2]$. Ⓑ $\mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$. Ⓒ $\mathbb{R}$. Ⓓ $(-2;2)$.

Câu 6

Tập xác định của hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x+1}}{\ln(5-x)}$ là

Ⓐ $\mathbb{R}\setminus\{4\}$. Ⓑ $[-1;5)\setminus\{4\}$. Ⓒ $(-1;5)$. Ⓓ $[-1;5]$.

Câu 7

Hàm số $y = \log_5(4x - x^2)$ có tập xác định là

(A) $\mathscr{D} = (0; +\infty)$. (B) $\mathscr{D} = (0; 4)$.

(C) $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. (D) $\mathscr{D} = (-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$.

Câu 8

Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = \log(x^2 + 2x + 3)$.

(A) $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2; -1\}$. (B) $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

(C) $\mathscr{D} = \varnothing$. (D) $\mathscr{D} = (-\infty; -2) \cup (-1; +\infty)$.

Câu 9

Cho hàm số $y = 3^{x+1}$. Đẳng thức nào sau đây **đúng**?

(A) $y'(1) = \dfrac{9}{\ln 3}$. (B) $y'(1) = 3\ln 3$. (C) $y'(1) = 9\ln 3$. (D) $y'(1) = \dfrac{3}{\ln 3}$.

Câu 10

Đạo hàm cấp hai của hàm số $y = \ln x$ là

(A) $y'' = \dfrac{1}{x^2}$. (B) $y'' = \dfrac{-1}{x^2}$. (C) $y'' = \dfrac{1}{x}$. (D) $y'' = \dfrac{-1}{x}$.

Câu 11

Đạo hàm y' của hàm $y = \mathrm{e}^{x^2+x}$ là hàm số nào?

(A) $y' = (2x+1)e^{x^2+x}$. (B) $y' = (2x+1)e^{x}$.

(C) $y' = (x^2+x)e^{2x+1}$. (D) $y' = (2x+1)e^{2x+1}$.

Câu 12

Cho hàm số $y = \ln\left(4 - x^2\right)$. Tập nghiệm của bất phương trình $y' \le 0$ là

(A) $(0; 2]$. (B) $[0; 2]$. (C) $[0; 2)$. (D) $(0; 2)$.

Câu 13

Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

(A) $y = \left(\dfrac{3}{\pi}\right)^x$. (B) $y = \left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\mathrm{e}}\right)^x$.

(C) $y = \log_7\left(x^4 + 5\right)$. (D) $y = \left(\dfrac{\sqrt{2018}-\sqrt{2015}}{10^{-1}}\right)^x$.

Câu 14

Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = \pi^{\cos x}, x \in \mathbb{R}$.

(A) $M = \pi,\ m = \dfrac{1}{\pi}$. (B) $M = \sqrt{\pi},\ m = 1$.

(C) $M=\pi,\ m=1$.
(D) $M=\pi,\ m=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$.

Câu 15

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x-\ln x+7$ là
(A) 7.
(B) 8.
(C) 1.
(D) không có.

Câu 16

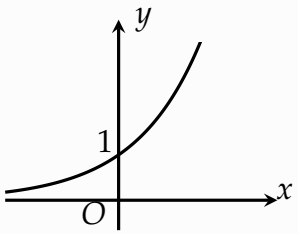
Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^2\mathrm{e}^x$ trên đoạn $[-1;1]$.
(A) $\max\limits_{[-1;1]} f(x)=\mathrm{e}$.
(B) $\max\limits_{[-1;1]} f(x)=0$.
(C) $\max\limits_{[-1;1]} f(x)=2\mathrm{e}$.
(D) $\max\limits_{[-1;1]} f(x)=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

Câu 17

Giá trị lớn nhất của hàm số $y=x(2-\ln x)$ trên đoạn $[2;3]$ là
(A) $\max\limits_{[2;3]} y=4-\ln 2$.
(B) $\max\limits_{[2;3]} y=6-3\ln 3$.
(C) $\max\limits_{[2;3]} y=\mathrm{e}$.
(D) $\max\limits_{[2;3]} y=4-2\ln 2$.

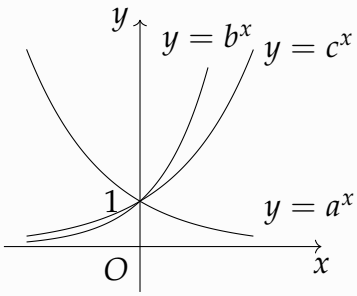
Câu 18

Đồ thị sau đây là của hàm số nào?
(A) $y=2^x$.
(B) $y=\log_{\frac{1}{2}} x$.
(C) $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$.
(D) $y=\log_2 x$.



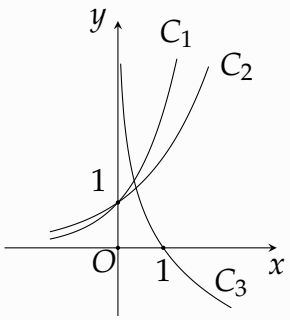
Câu 19

Cho a,b,c là các số thực dương, khác 1. Đồ thị các hàm số $y=a^x, y=b^x, y=c^x$ được cho trong hình vẽ dưới đây. Mệnh đề nào sau đây đúng?
(A) $1<a<c<b$.
(B) $a<1<c<b$.
(C) $a<1<b<c$.
(D) $1<a<b<c$.



Câu 20

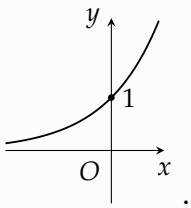
Cho ba hàm số $y = a^x, y = b^x, y = \log_c x$ lần lượt có đồ thị $(C_1), (C_2), (C_3)$ như hình bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

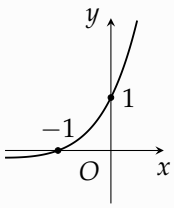


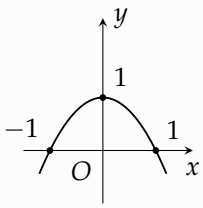
(A) $a > b > c$. (B) $b > a > c$. (C) $c > b > a$. (D) $c > a > b$.

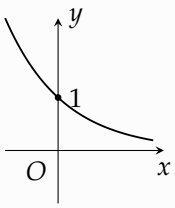
Câu 21

Cho hàm số $y = f(x) = x \cdot e^x$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị là một trong bốn hình sau đây. Hỏi đó là hình nào?

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

Câu 22

Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trong đoạn $[-25;25]$ để hàm số $y = 16^x - 4^{x+2} - 2mx + 2018$ đồng biến trên khoảng $(1;4)$?

(A) 3. (B) 4. (C) 10. (D) 28.

Câu 23

Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $b > 1$, $\sqrt{a} \le b < a$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_{\frac{a}{b}} a + 2\log_{\sqrt{b}} \left(\frac{a}{b}\right)$ bằng

(A) 7. (B) 4. (C) 5. (D) 6.

Câu 24

Tìm các giá trị thực của m để hàm số $y = 2^{x^3 - x^2 + mx + 1}$ đồng biến trên $[1;2]$.

(A) $m > -8$. (B) $m \ge -1$. (C) $m \le -8$. (D) $m < -1$.

Câu 25

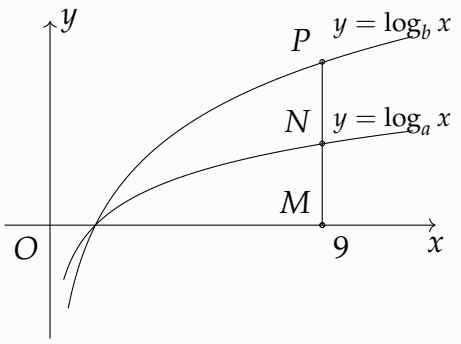
Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \log_{2018}(mx - m + 2)$ xác định trên $[1; +\infty)$.

(A) $m < 0$. (B) $m \ge 0$. (C) $m \le 0$. (D) $m > 0$.

Câu 26

Cho hàm số $y = \log_a x$ và $y = \log_b x$ có đồ thị lần lượt là (C) và (C') (như hình vẽ bên). Đường thẳng $x = 9$ cắt trục hoành và các đồ thị (C) và (C') lần lượt tại M, N và P. Biết rằng $MN = NP$, hãy xác định biểu thức liên hệ giữa a và b

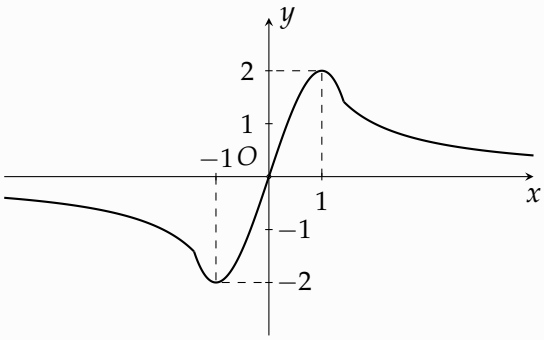
(A) $a = b^2$. (B) $a = 9b$.
(C) $a = 3b$. (D) $a = b + 3$.



Câu 27

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Biết rằng trục hoành là tiệm cận ngang của đồ thị. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) = 4^{m+2\log_4 \sqrt{2}}$ có hai nghiệm phân biệt dương.

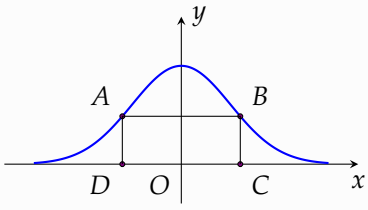
(A) $m > 1$. (B) $0 < m < 1$.
(C) $m < 0$. (D) $0 < m < 2$.



Câu 28

Cho hàm số $y = e^{-2x^2}$ có đồ thị (C) như hình vẽ bên. Xét $ABCD$ là hình chữ nhật thay đổi sao cho A và B thuộc (C), C và D luôn nằm trên trục hoành. Tính giá trị lớn nhất của diện tích hình chữ nhật $ABCD$.

(A) $\sqrt{e}$. (B) $e^{\sqrt{2}}$. (C) $\dfrac{1}{e^{\sqrt{2}}}$. (D) $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$.



Câu 29

Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\ln x + \ln y \geq \ln\left(x^2 + y\right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + y$.

(A) $P = 6$. (B) $P = 2 + 3\sqrt{2}$. (C) $P = 3 + 2\sqrt{2}$. (D) $P = \sqrt{17} + \sqrt{3}$.

Câu 30

Xét hàm số $f(x) = e^x(a\sin x + b\cos x)$ với a, b là tham số. Biết rằng tồn tại $x \in \mathbb{R}$ để $f(x) + f''(x) = 5e^x$. Khi đó, nhận xét nào sau đây là đúng?

(A) $a + b = 5$. (B) $a^2 + b^2 \geq 5$. (C) $|a - b| \leq 5$. (D) $a^2 + b^2 = 25$.

——HẾT——

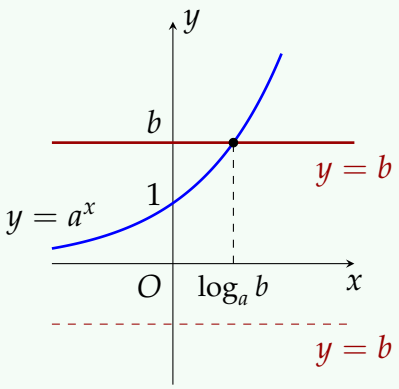
§5. PHƯƠNG TRÌNH MŨ, PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT CƠ BẢN

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Công thức nghiệm của phương trình mũ

Công thức nghiệm phương trình mũ

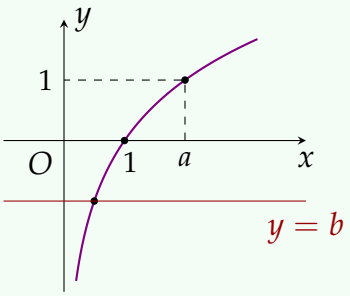
- Dạng $a^x = b$ (1), với $0 < a$ và $a \neq 1$.
- Về mặt đồ thị, nghiệm của (1) là hoành độ giao điểm của đồ thị $y = a^x$ với đường thẳng $y = b$ (nằm ngang). Từ hình vẽ, ta có các kết quả sau:
  - ① $b > 0$ (1) có nghiệm duy nhất $x = \log_a b$.
  - ② $b \leq 0$ (1) vô nghiệm.
- **Tóm lại:** Với $a > 0$ và $a \neq 1$, $b > 0$, ta có các công thức sau đây:
- ① $a^{f(x)} = b \Leftrightarrow f(x) = \log_a b$
- ② $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$



2. Công thức nghiệm của phương trình lôgarit

Công thức nghiệm phương trình lôgarit

- Dạng $\log_a x = b$ (1), với $0 < a$ và $a \neq 1$.
- Về mặt đồ thị, nghiệm của (1) là hoành độ giao điểm của đồ thị $y = \log_a x$ với đường thẳng $y = b$ (nằm ngang). Từ hình vẽ, ta có các kết quả sau:
  - ① Với mọi b, (1) luôn có nghiệm duy nhất.
  - ② $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$.
- **Tóm lại:** Với $a > 0$ và $a \neq 1$, b bất kì, ta có các công thức sau đây:
  - ① $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$.
  - ② $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 (\text{ hoặc } g(x) > 0) \\ f(x) = g(x) \end{cases}$.



B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1 Giải phương trình mũ cơ bản, phương pháp đưa về cùng cơ số

Xác định cơ số chung cần chuyển đổi và đưa về một trong hai dạng sau:

① $a^{f(x)} = b \Leftrightarrow f(x) = \log_a b$, với $a > 0, a \neq 1$ và $(b > 0)$

② $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$, với $a > 0, a \neq 1$

Ví dụ 1

Phương trình $2^{x-1} = 32$ có nghiệm là

(A) $x = 5$. (B) $x = 6$. (C) $x = 4$. (D) $x = 3$.

Ví dụ 2

Phương trình $5^{2x+1} = 125$ có nghiệm là

(A) $x = \frac{5}{2}$. (B) $x = \frac{3}{2}$. (C) $x = 3$. (D) $x = 1$.

Ví dụ 3

Tìm nghiệm của phương trình $4^{2x+5} = 2^{2-x}$.

(A) $-\frac{8}{5}$. (B) $\frac{12}{5}$. (C) 3. (D) $\frac{8}{5}$.

Ví dụ 4

Tìm số nghiệm của phương trình $27^{\frac{x-2}{x-1}} = \frac{\sqrt{3}^{7x}}{243}$.

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) Vô số.

Ví dụ 5

Trong khoảng $(-3\pi; 2021\pi)$, phương trình $4^{\sin x \cos x} = 2$ có bao nhiêu nghiệm?

(A) 2020. (B) 2024. (C) 1012. (D) 1010.

Ví dụ 6

Cho hai hàm số $f(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)$ và $g(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$. Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình $2019^{f(x)} = \left(\frac{1}{2019}\right)^{g(x)}$.

(A) 10. (B) -12. (C) 11. (D) -11.

Ví dụ 7

Biết nghiệm của phương trình $2^x \cdot 15^{x+1} = 3^{x+3}$ được viết dưới dạng $x = 2\log a - \log b$, với a, b là hai số nguyên dương nhỏ hơn 10. Tính $S = 2017a^3 - 2018b^2$.

(A) $S = 4009$. (B) $S = 2014982$. (C) $S = 1419943$. (D) $S = -107791$.

Ví dụ 8

Tìm số nghiệm thực của phương trình $2^{x^2-5x+6}+2^{1-x^2}=2\cdot 2^{6-5x}+1$.

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

Dạng 2 Giải phương trình mũ bằng phương pháp đặt ẩn phụ

Cho $m_n, m_{n-1}, \cdots, m_1, m_0$ là các số thực cho trước (hệ số) và $0<a\neq 1$.

① Dạng bậc hai đối với ẩn a^x:

$$m_2.a^{2x}+m_1.a^x+m_0=0$$

— Đặt $t=a^x$ $(t>0)$, ta được $m_2t^2+m_1t+m_0=0$.

— Giải tìm $t_0>0$. Thay trở lại, tìm nghiệm $x=\log_a t_0$.

② Tổng quát phương trình bậc n theo ẩn a^x:

$$m_n.a^{nx}+m_{n-1}a^{(n-1)x}+\cdots+m_1a^x+m_0=0$$

— Đặt $t=a^x$, với $t>0$;

— Ta được phương trình $m_nt^n+m_{n-1}t^{n-1}+\cdots+m_1t+m_0=0$.

③ Dạng tích hai cơ số bằng 1

— $\boxed{ma^x+na^{-x}+k=0}$

Đặt $t=a^x$, ta được phương trình $mt+n\cdot\dfrac{1}{t}+k=0$

— $\boxed{a^x+b^x=c, \text{ với } a.b=1}$

Đặt $t=a^x>0$ suy ra $b^x=\dfrac{1}{t}$. Ta được phương trình $t+\dfrac{1}{t}=c$.

④ Dạng đồng bậc hai (đẳng cấp bậc hai):

$$\alpha.a^{2x}+\beta.(a.b)^x+\gamma.b^{2x}=0$$

— Chia hai vế phương trình cho b^{2x}, ta được: $\alpha\left(\dfrac{a}{b}\right)^{2x}+\beta\left(\dfrac{a}{b}\right)^x+\gamma=0$;

— Đặt $t=\left(\dfrac{a}{b}\right)^x>0$, suy ra $\alpha t^2+\beta t+\gamma=0$.

Ví dụ 1

Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $9^x-2018\cdot 3^x+2016=0$ bằng

(A) $\log_3 1008$. (B) $\log_3 2018$. (C) $\log_3 1009$. (D) $\log_3 2016$.

Ví dụ 2

Cho phương trình $3^{2x+10}-18\cdot 3^{x+4}-3=0$ (1). Nếu đặt $t=3^{x+5}$, $t>0$ thì phương trình (1) trở thành phương trình nào sau đây?

(A) $9t^2-2t-3=0$. (B) $t^2-18t-3=0$. (C) $t^2-6t-3=0$. (D) $9t^2-6t-3=0$.

Ví dụ 3

Biết rằng phương trình $4^{x^2-x}+2^{x^2-x+1}=3$ có hai nghiệm. Hãy tính tổng của hai nghiệm đó.

(A) 1. (B) 3. (C) 0. (D) 2.

Ví dụ 4

Cho phương trình $2^x+2^{3-x}-9=0$. Tìm S là tổng các nghiệm của phương trình.

(A) $S=8$. (B) $S=9$. (C) $S=4$. (D) $S=3$.

Ví dụ 5

Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $3^x+6\cdot 3^{-x}-5=0$. Tính giá trị biểu thức $A=|x_1-x_2|$.

(A) $A=1+\log_3 2$. (B) $A=1$. (C) $A=\log_3\dfrac{2}{3}$. (D) $A=\log_3\dfrac{3}{2}$.

Ví dụ 6

Tính tổng các nghiệm của phương trình của phương trình $2^{x^2-x}-2^{2+x-x^2}=3$.

(A) 2. (B) 1. (C) 0. (D) 3.

Ví dụ 7

Số nghiệm của phương trình $6\cdot 9^x-13\cdot 6^x+6\cdot 4^x=0$ là

(A) 0. (B) 2. (C) 1. (D) 3.

Ví dụ 8

Gọi S là tập hợp tất cả các nghiệm của phương trình $4^{2\sin x+1}+12^{\sin x}-9^{\sin x+\frac{1}{2}}=0$ trên khoảng $(0;2020)$. Tính tổng các phần tử trong tập S.

(A) $\dfrac{206435\pi}{2}$. (B) $\dfrac{206401\pi}{2}$. (C) $\dfrac{206407\pi}{2}$. (D) $\dfrac{206403\pi}{2}$.

Dạng 3 Giải phương trình mũ bằng phương pháp lôgarít hóa

- Lấy lôgarít cơ số a hai vế, (thường chọn a là cơ số cho sẵn trong phương trình).
- Biến đổi về phương trình cơ bản.

Ví dụ 1

Phương trình $5^{x^2-3x+2}=3^{x-2}$ có một nghiệm dạng $x=\log_a b$ với a, b là các số nguyên dương lớn hơn 4 và nhỏ hơn 16. Khi đó $a+2b$ bằng

(A) 35. (B) 30. (C) 40. (D) 25.

Ví dụ 2

Số nghiệm của phương trình $2^{x^3+2x^2-3x}\cdot 3^{x-1}=1$ là

(A) 2. (B) 1. (C) 0. (D) 3.

Dạng 4 Giải phương trình lôgarit cơ bản, phương pháp đưa về cùng cơ số

Xác định cơ số chung cần chuyển đổi và đưa về một trong hai dạng sau:

① $\log_a f(x)=b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>0 \text{ (không cần cũng được)} \\ f(x)=a^b. \end{cases}$

② $\log_a f(x)=\log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>0 \text{ (hoặc } g(x)>0) \\ f(x)=g(x) \end{cases}$.

Ví dụ 1

Phương trình $\log_2(x^2-9x)=3$ có tích hai nghiệm bằng

(A) 9. (B) 3. (C) 27. (D) -8.

Ví dụ 2

Tìm tập nghiệm của phương trình $\log_3\left(2x^2+x+3\right)=1$.

(A) $\{0\}$. (B) $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$. (C) $\left\{0;-\frac{1}{2}\right\}$. (D) $\left\{0;\frac{1}{2}\right\}$.

Ví dụ 3

Tính tổng các nghiệm của phương trình $\log\left(10^{100x}\right)+\log\left(10^{100x^2}\right)=200$.

(A) -2. (B) 4. (C) -1. (D) 3.

Ví dụ 4

Số nghiệm của phương trình $\log_2\left(x^2-4|x|+4\right)=2$ là

(A) 2. (B) 3. (C) 4. (D) 1.

Ví dụ 5

Tập nghiệm của phương trình $\log_2 x=\log_2\left(x^2-x\right)$ là

(A) $\{2\}$. (B) $\{0\}$. (C) $\{0;2\}$. (D) $\{1;2\}$.

Ví dụ 6

Tổng các nghiệm của phương trình $\log_{\sqrt{2}} x\cdot\log_2 x=18$ bằng

(A) $\frac{37}{6}$. (B) 8. (C) $\frac{65}{8}$. (D) $\frac{63}{8}$.

Ví dụ 7

Tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $2\log_4(x-3)+\log_4(x-5)^2=0$ là

(A) 8. (B) $8+\sqrt{2}$. (C) $8-\sqrt{2}$. (D) $4+\sqrt{2}$.

Ví dụ 8

Số nghiệm của phương trình $\log_2(4^x+4)=x-\log_{\frac{1}{2}}(2^{x+1}-3)$ là

(A) 3. (B) 1. (C) 0. (D) 2.

Ví dụ 9

Cho số nguyên dương n thỏa mãn

$$\log_2\frac{1}{2}+\log_2\frac{1}{4}+\log_2\frac{1}{8}+\cdots+\log_2\frac{1}{2^n}=-12403.$$

Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

(A) $131<n<158$. (B) $n<126$. (C) $166<n<170$. (D) $n>207$.

Dạng 5 Giải phương trình lôgarít bằng phương pháp đặt ẩn phụ

Giải phương trình $f\left[\log_a g(x)\right]=0\,(0<a\neq 1)$.

- Đặt $t=\log_a g(x)\quad(*)$ và tìm điều kiện của t (nếu có).
- Ta được phương trình $f(t)=0$. Giải tìm nghiệm t.
- Thay vào $(*)$ để tìm x.

Các dạng thường gặp:

① $m\cdot\log_a^2 x+n\cdot\log_a x+k=0\longrightarrow$ Đặt $t=\log_a x$, ta được $mt^2+nt+k=0$.

② $m\cdot\log_a x+n\cdot\log_x a+k=0\longrightarrow$ Đặt $t=\log_a x$, ta được $m\cdot t+n\cdot\dfrac{1}{t}+k=0$.

⚠ *Chúy ý các biến đổi sau:*

① $\log^2_{\sqrt{a}}x=\left(\log_{\sqrt{a}}x\right)^2=\left(\log_{a^{\frac{1}{2}}}x\right)^2=4\log_a^2 x$

② $\log_a[f(x)]^2=2\log_a|f(x)|$ *(mũ chẵn, khi hạ mũ xuống phải có trị tuyệt đối)*

Ví dụ 1

Tổng các nghiệm của phương trình $\log_2^2 x-\log_3 9\cdot\log_2 x=3$

(A) 2. (B) 8. (C) -2. (D) $\dfrac{17}{2}$.

Ví dụ 2

Gọi T là tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_{\frac{1}{3}}^2 x - 5\log_3 x + 6 = 0$. Tính T.

(A) $T = 36$. (B) $T = \dfrac{1}{243}$. (C) $T = 5$. (D) $T = -3$.

Ví dụ 3

Biết rằng phương trình $\log_2^2(2x) - 5\log_2 x = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2. Tính $x_1 x_2$.

(A) 8. (B) 5. (C) 3. (D) 1.

Ví dụ 4

Cho phương trình $\log_2^2(4x) - \log_{\sqrt{2}}(2x) = 5$. Nghiệm nhỏ nhất của phương trình thuộc khoảng

(A) $(1;3)$. (B) $(5;9)$. (C) $(3;5)$. (D) $(0;1)$.

Ví dụ 5

Số nghiệm của phương trình $\log_2 x + 3\log_x 2 = 4$ là

(A) 0. (B) 1. (C) 4. (D) 2.

Ví dụ 6

Cho phương trình $4\log_{25} x + \log_x 5 = 3$. Tích các nghiệm của phương trình là bao nhiêu?

(A) $5\sqrt{5}$. (B) $3\sqrt{3}$. (C) $2\sqrt{2}$. (D) 8.

Dạng 6 Giải phương trình mũ và lôgarít bằng phương pháp hàm số

☑ **Dạng 1.** Xét phương trình $f(x) = k$ (1), với k là một hằng số và $\mathscr{D}_f$ (một khoảng, nửa khoảng, đoạn) là miền xác định của $f(x)$. Có thể xem đây là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $y = f(x)$ với đường thẳng $y = k$ (nằm ngang). Khi đó, nếu $y = f(x)$ luôn đồng biến (hoặc nghịch biến) trên $\mathscr{D}_f$ thì phương trình (1) có không quá 1 nghiệm.

- Dự đoán 1 nghiệm $x_0 \in \mathscr{D}_f$ của phương trình (1),
- Chứng minh $y = f(x)$ luôn đồng biến (hoặc nghịch biến) trên $\mathscr{D}_f$ thì x_0 là nghiệm duy nhất của (1)

☑ **Dạng 2.** Xét phương trình $f(u) = f(v)$ (2), và $\mathscr{D}_f$ (một khoảng, nửa khoảng, đoạn) là miền xác định của $f(x)$. Khi đó, nếu

- $u, v \in \mathscr{D}_f$;
- $y = f(x)$ luôn đồng biến (hoặc nghịch biến) trên $\mathscr{D}_f$

thì từ

$$f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v.$$

Ví dụ 1

Phương trình $3^x + 4^x = 25$ có bao nhiêu nghiệm?

(A) 3. (B) 2. (C) 0. (D) 1.

Ví dụ 2

Tìm số nghiệm của phương trình $\log_5(1+x^2) + \log_{\frac{1}{3}}(1-x^2) = 0$.

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Ví dụ 3

Tính tổng bình phương các nghiệm của phương trình $x^2.5^{x-1} - (3^x - 3.5^{x-1}).x + 2.5^{x-1} - 3^x = 0$.

(A) 4. (B) 2. (C) 0. (D) 13.

Ví dụ 4

Tính tích tất cả các nghiệm thực của phương trình $\log_2\left(\frac{2x^2+1}{2x}\right) + 2^{x+\frac{1}{2x}} = 5$.

(A) 1. (B) 2. (C) $\frac{1}{2}$. (D) 0.

Ví dụ 5

Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log\frac{x^3+3x^2-3x-5}{x^2+1} + (x+1)^3 = x^2+6x+7$.

(A) $-2-\sqrt{3}$. (B) $-2+\sqrt{3}$. (C) 0. (D) -2.

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BẢNG TÔ ĐÁP ÁN TỰ LUYỆN – ĐỀ SỐ 1

Học sinh làm BTTL xong, tô phương án đúng. Buổi học sau, cùng với GV kiểm tra kết quả.

1	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	7	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	13	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	19	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	25	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
2	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	8	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	14	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	20	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	26	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
3	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	9	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	15	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	21	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	27	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
4	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	10	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	16	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	22	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	28	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
5	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	11	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	17	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	23	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	29	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
6	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	12	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	18	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	24	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	30	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

Câu 1

Phương trình $2^{2x+1}=32$ có nghiệm là

Ⓐ $x=\dfrac{5}{2}$. Ⓑ $x=2$. Ⓒ $x=\dfrac{3}{2}$. Ⓓ $x=3$.

Câu 2

Cho phương trình $3^{x^2-3x+8}=9^{2x-1}$. Tập nghiệm S của phương trình đó là

Ⓐ $S=\left\{\dfrac{5-\sqrt{61}}{2};\dfrac{5+\sqrt{61}}{2}\right\}$. Ⓑ $S=\left\{\dfrac{-5-\sqrt{61}}{2};\dfrac{-5+\sqrt{61}}{2}\right\}$.

Ⓒ $S=\{2;5\}$. Ⓓ $S=\{-2;-5\}$.

Câu 3

Tích tất cả các nghiệm của phương trình $2^{x^2+x}=4$ bằng

Ⓐ 2. Ⓑ 3. Ⓒ -2. Ⓓ -1.

Câu 4

Tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=2^{-x}+3$ và đường thẳng $y=11$ là

Ⓐ $(-3;11)$. Ⓑ $(4;11)$. Ⓒ $(-4;11)$. Ⓓ $(3;11)$..

Câu 5

Biết rằng phương trình $2^{x^2-4x+2}=2^{x-4}$ có hai nghiệm phân biệt là x_1, x_2. Tính giá trị biểu thức $S=x_1^4+x_2^4$.

Ⓐ $S=17$. Ⓑ $S=257$. Ⓒ $S=97$. Ⓓ $S=92$.

Câu 6

Nghiệm của phương trình $\left(\dfrac{1}{25}\right)^{x+1}=125^{2x}$ là giá trị nào?

Ⓐ 1. Ⓑ 4. Ⓒ $-\dfrac{1}{4}$. Ⓓ $-\dfrac{1}{8}$.

Câu 7

Tìm nghiệm của phương trình $5^{2018x} = \sqrt{5}^{2018}$.

(A) $x = 1 - \log_5 2$. (B) $x = -\log_5 2$. (C) $x = \dfrac{1}{2}$. (D) $x = 2$.

Câu 8

Tìm nghiệm của phương trình $9^{\sqrt{x-1}} = e^{\ln 81}$.

(A) $x = 5$. (B) $x = 4$. (C) $x = 6$. (D) $x = 17$.

Câu 9

Tìm tập nghiệm S của phương trình $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{4x} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{2x-6}$

(A) $S = \{-1\}$. (B) $S = \{1\}$. (C) $S = \{-3\}$. (D) $S = \{3\}$.

Câu 10

Tìm tất cả giá trị của tham số m để phương trình $5^x - 1 - m = 0$ có nghiệm.

(A) $m > 0$. (B) $m > -1$. (C) $m < 0$. (D) $m < -1$.

Câu 11

Tìm tất cả giá trị của tham số m để phương trình $5^{x^2} + 1 - m = 0$ có nghiệm.

(A) $m \geq 2$. (B) $m > -1$. (C) $m < 0$. (D) $m < -1$.

Câu 12

Tập nghiệm S của phương trình $4^x - 5 \cdot 2^x + 6 = 0$ là

(A) $S = \{1; \log_3 2\}$. (B) $S = \{1; 6\}$. (C) $S = \{2; 3\}$. (D) $S = \{1; \log_2 3\}$.

Câu 13

Cho phương trình $3^{2x+5} = 3^{x+2} + 2$. Khi đặt $t = 3^{x+1}$, phương trình đã cho trở thành phương trình nào trong các phương trình dưới đây.

(A) $81t^2 - 3t - 2 = 0$. (B) $27t^2 - 3t - 2 = 0$. (C) $27t^2 + 3t - 2 = 0$. (D) $3t^2 - t - 2 = 0$.

Câu 14

Gọi x_1, x_2, x_3 là tất cả các nghiệm của phương trình $\left(3 + 2\sqrt{2}\right)^{x^2-x+2} = \left(3 - 2\sqrt{2}\right)^{x^3-2}$. Tính $P = x_1.x_2.x_3$.

(A) $P = 0$. (B) $P = -2$. (C) $P = -1$. (D) $P = 1$.

Câu 15

Số nghiệm của phương trình $9^x + 2 \cdot 3^{x+1} - 7 = 0$ là

(A) 1. (B) 4. (C) 2. (D) 0.

Câu 16

Tính tổng tất cả các nghiệm nguyên của phương trình $2^{2x+1}-5\cdot 2^x+2=0$.

(A) 0. (B) $\frac{5}{2}$. (C) 1. (D) 2.

Câu 17

Tính tổng bình phương các nghiệm của phương trình $(2+\sqrt{3})^x+(2-\sqrt{3})^x=14$.

(A) 0. (B) 8. (C) 4. (D) 16.

Câu 18

Tập nghiệm của phương trình $5^{x^2-4x+3}+5^{x^2+7x+6}=5^{2x^2+3x+9}+1$ là

(A) $\{-1;1;3\}$. (B) $\{-1;1;3;6\}$. (C) $\{-6;-1;1;3\}$. (D) $\{1;3\}$.

Câu 19

Tổng giá trị tất cả các nghiệm của phương trình $2\cdot 4^{x+2018}-\frac{5}{2}\cdot 2^{x+2019}+2=0$ bằng

(A) $\frac{5}{2}$. (B) 0. (C) -4036. (D) 4037.

Câu 20

Tìm tích T tất cả các nghiệm của phương trình $4^{x^2-1}-6.2^{x^2-2}+2=0$.

(A) $T=2$. (B) $T=8$. (C) $T=6$. (D) $T=4$.

Câu 21

Tìm tổng các nghiệm của phương trình $3^{2+x}+3^{2-x}=30$.

(A) 3. (B) $\frac{10}{3}$. (C) 0. (D) $\frac{1}{3}$.

Câu 22

Tập nghiệm của phương trình $5^{1+x^2}-5^{1-x^2}=24$ có bao nhiêu phần tử?

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 4.

Câu 23

Tính T là tổng tất cả các nghiệm của phương trình $4\cdot 9^x-13\cdot 6^x+9\cdot 4^x=0$.

(A) $T=2$. (B) $T=\frac{1}{4}$. (C) $T=3$. (D) $T=\frac{13}{4}$.

Câu 24

Tính tổng các nghiệm của phương trình $3.4^{x+1}-35.6^x+2.9^{x+1}=0$.

(A) $2-\log_2 3$. (B) 4. (C) -1. (D) $2+\log_2 3$.

Câu 25

Phương trình $27 \cdot 4^x - 30 \cdot 6^x + 8 \cdot 9^x = 0$ tương đương với phương trình nào sau đây?

(A) $x^2 + 3x + 2 = 0$.
(B) $x^2 - 3x + 2 = 0$.
(C) $27x^2 - 30x + 8 = 0$.
(D) $8x^2 - 30x + 27 = 0$.

Câu 26

Biết phương trình $3^x \cdot 5^{\frac{2x-1}{x}} = 15$ có hai nghiệm thực phân biệt $x_1; x_2$. Tính tích $x_1 \cdot x_2$.

(A) $x_1 \cdot x_2 = \log_3 5$.
(B) $x_1 \cdot x_2 = -\log_3 5$.
(C) $x_1 \cdot x_2 = 1 + \log_3 5$.
(D) $x_1 \cdot x_2 = 1 - \log_3 5$.

Câu 27

Biết rằng phương trình $3^{x^2+1}25^{x-1} = \dfrac{3}{25}$ có hai nghiệm x_1 và x_2. Giá trị của biểu thức $P = \sqrt{3^{x_1} + 3^{x_2}}$ bằng

(A) $\sqrt{26}$.
(B) 26.
(C) $\dfrac{\sqrt{26}}{5}$.
(D) $\dfrac{26}{25}$. .

Câu 28

Tích các nghiệm của phương trình $6^x - 2.2^x - 81.3^x + 162 = 0$ bằng

(A) 4.
(B) 6.
(C) 7 .
(D) 10.

Câu 29

Phương trình $2^{2x^2+1} - 9.2^{x^2+x} + 2^{2x+2} = 0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$ $(x_1 < x_2)$. Khi đó giá trị biểu thức $K = 2x_1 + 3x_2$ bằng

(A) 0.
(B) 2.
(C) 4.
(D) 5.

Câu 30

Số nghiệm của phương trình $27^{\sin^2 x} + 3^{2\sin^2 x} - 3^{2-\cos^2 x} - 3 = 0$ trong khoảng $(\pi; 250\pi)$ là

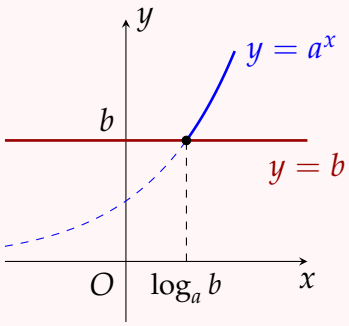
(A) 500 .
(B) 498.
(C) 250.
(D) 249.

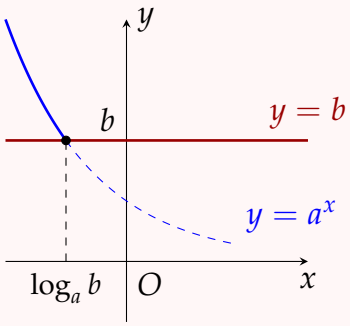
§6. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ, BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT CƠ BẢN

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Công thức nghiệm của bất phương trình mũ

Minh họa dạng $\boxed{a^x > b}$, với $a > 0$ và $a \neq 1$.

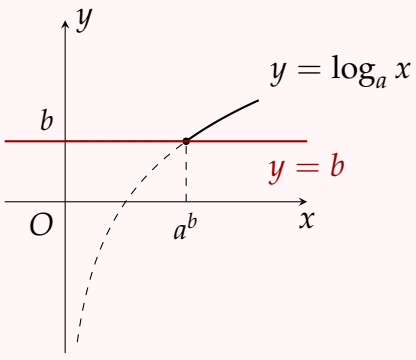


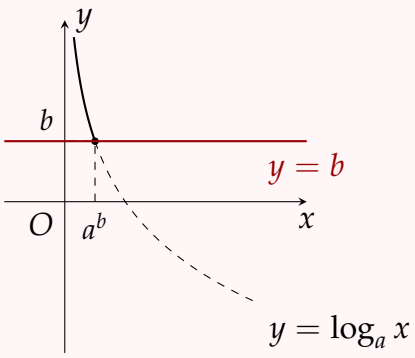


- Nếu $b \leq 0$ thì tập nghiệm của bất phương trình là $\mathbb{R}$.
- Nếu $b > 0$, ta có hai trường hợp:
  - ① Với $a > 1$ thì $a^x > b \Leftrightarrow x > \log_a b$ (Hình 1).
  - ② Với $0 < a < 1$ thì $a^x > b \Leftrightarrow x < \log_a b$ (Hình 2).

2. Công thức nghiệm của bất phương trình lôgarit

Minh họa dạng $\boxed{\log_a x > b}$, với $a > 0$ và $a \neq 1$.





- Điều kiện xác định $x > 0$.
- Ta có hai trường hợp:
  - ① Với $a > 1$ thì $\log_a x > b \Leftrightarrow x > a^b$ (Hình 1).
  - ② Với $0 < a < 1$ thì $\log_a x > b \Leftrightarrow 0 < x < a^b$ (Hình 2).

⚠ *Các trường hợp $a^x \geq b$, $a^x < b$, $a^x \leq b$, $\log_a x \geq b$, $\log_a x < b$, $\log_a x \leq b$... ta suy luận tương tự.*

- *Cơ số $a > 1$: Ta so sánh "cùng chiều";*
- *Cơ số $0 < a < 1$: Ta so sánh "nghịch chiều".*

B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1 Giải bất phương trình mũ cơ bản, phương pháp đưa về cùng cơ số

Với $a > 1$ ta có

① $a^{f(x)} \le b \Leftrightarrow f(x) \le \log_a b \quad (b > 0)$;

② $a^{f(x)} \le a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \le g(x)$.

Với $0 < a < 1$ ta có

① $a^{f(x)} \le b \Leftrightarrow f(x) \ge \log_a b \quad (b > 0)$;

② $a^{f(x)} \le a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \ge g(x)$.

Ví dụ 1

Tập nghiệm của bất phương trình $3^{2x-1} > 27$ là

(A) $(2;+\infty)$. (B) $(3;+\infty)$. (C) $\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$. (D) $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Ví dụ 2

Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x+1} > 0$ là

(A) $x \in \mathbb{R}$. (B) $x > -1$. (C) $x > 1$. (D) $x > 0$.

Ví dụ 3

Nghiệm của bất phương trình $3^{2x+1} > 3^{3-x}$ là

(A) $x > -\frac{2}{3}$. (B) $x > \frac{3}{2}$. (C) $x > \frac{2}{3}$. (D) $x < \frac{2}{3}$.

Ví dụ 4

Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \ge \frac{1}{4}$.

(A) $S = \{x \in \mathbb{R} | x > 3\}$. (B) $S = \{x \in \mathbb{R} | 1 < x \le 3\}$.

(C) $S = \{x \in \mathbb{R} | x \le 3\}$. (D) $S = \{x \in \mathbb{R} | x \ge 3\}$.

Ví dụ 5

Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $4^x < 2^{x+1}$.

(A) $S = (1;+\infty)$. (B) $S = (-\infty;1)$. (C) $S = (0;1)$. (D) $S = (-\infty;+\infty)$.

Ví dụ 6

Tập nghiệm của bất phương trình $3^{2x+1} > \left(\frac{1}{3}\right)^{-3x^2}$ là

(A) $\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right) \cup (1;+\infty)$. (B) $(1;+\infty)$.

Ⓒ $\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)$. Ⓓ $\left(-\frac{1}{3};1\right)$.

Ví dụ 7

Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\left(\frac{2}{5}\right)^{1-3x} \geq \frac{25}{4}$.

Ⓐ $[1;+\infty)$. Ⓑ $\left[\frac{1}{3};+\infty\right)$. Ⓒ $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$. Ⓓ $(-\infty;1]$.

Ví dụ 8

Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\sqrt[3]{5}\right)^{x-1} < 5^{x+3}$ là

Ⓐ $(-\infty;-5)$. Ⓑ $(-\infty;0)$. Ⓒ $(-5;+\infty)$. Ⓓ $(0;+\infty)$.

Ví dụ 9

Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $25^{x-5}-5^x \leq 0$.

Ⓐ $S=(0;10]$. Ⓑ $S=(\infty;10]$. Ⓒ $S=(-\infty;10)$. Ⓓ $S=(0;10)$.

Ví dụ 10

Tập nghiệm của bất phương trình $\left(2-\sqrt{3}\right)^x > \left(7-4\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)^{x+1}$ là

Ⓐ $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$. Ⓑ $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. Ⓒ $\left(-2;\frac{1}{2}\right)$. Ⓓ $\left(\frac{1}{2};2\right)$.

Ví dụ 11

Tập nghiệm của bất phương trình $2^x > 3^{x+1}$ là

Ⓐ $\varnothing$. Ⓑ $\left(-\infty;\log_{\frac{2}{3}}3\right)$. Ⓒ $(-\infty;\log_2 3]$. Ⓓ $\left(\log_{\frac{2}{3}}3;+\infty\right)$.

Ví dụ 12

Cho hàm số $f(x)=3^x\cdot 2^{x^2}$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

Ⓐ $f(x)<1 \Leftrightarrow x+x^2\log_3 2<0$. Ⓑ $f(x)<1 \Leftrightarrow -\log_2 3<x<0$.

Ⓒ $f(x)<1 \Leftrightarrow x\ln 3+x^2\ln 2<0$. Ⓓ $f(x)<1 \Leftrightarrow 1+x\log_3 2<0$.

Dạng 2 Giải bất phương trình mũ bằng phương pháp đặt ẩn phụ

Ví dụ 1

Bất phương trình $4^x < 2^{x+1}+3$ có tập nghiệm là

Ⓐ $S=(\log_2 3;5)$. Ⓑ $S=(2;4)$. Ⓒ $S=(-\infty;\log_2 3)$. Ⓓ $S=(1;3)$.

Ví dụ 2

Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $16^x - 5 \cdot 4^x + 4 \le 0$.

(A) $S = (0;1)$. (B) $S = [1;4]$. (C) $S = (1;4)$. (D) $S = [0;1]$.

Ví dụ 3

Tập nghiệm của bất phương trình $3 \cdot 9^x - 10 \cdot 3^x + 3 \le 0$ có dạng $S = [a;b]$ trong đó a, b là các số nguyên. Giá trị của biểu thức $5b - 2a$ bằng

(A) 7. (B) $\frac{43}{3}$. (C) 3. (D) $\frac{8}{3}$.

Ví dụ 4

Bất phương trình $2^{x+2} + 8 \cdot 2^{-x} - 33 < 0$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

(A) 4. (B) 6. (C) 7. (D) Vô số.

Ví dụ 5

Cho bất phương trình $12 \cdot 9^x - 35 \cdot 6^x + 18 \cdot 4^x > 0$. Nếu đặt $t = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ với $t > 0$ thì bất phương trình đã cho trở thành bất phương trình nào trong các bất phương trình dưới đây?

(A) $12t^2 - 35t + 18 > 0$. (B) $18t^2 - 35t + 12 > 0$.
(C) $12t^2 - 35t + 18 < 0$. (D) $18t^2 - 35t + 12 < 0$.

Ví dụ 6

Bất phương trình $25^{x+1} + 9^{x+1} \ge 34 \cdot 15^x$ có tập nghiệm S là

(A) $S = (-\infty;2]$. (B) $S = [-2;0]$.
(C) $S = (-\infty;-2] \cup [0;+\infty)$. (D) $S = [0;+\infty)$.

Ví dụ 7

Tập nghiệm của bất phương trình $2 \cdot 7^{x+2} + 7 \cdot 2^{x+2} \le 351 \cdot \sqrt{14^x}$ có dạng là đoạn $S = [a;b]$. Giá trị $b - 2a$ thuộc khoảng nào dưới đây?

(A) $(3;\sqrt{10})$. (B) $(-4;2)$. (C) $(\sqrt{7};4\sqrt{10})$. (D) $\left(\frac{2}{9};\frac{49}{5}\right)$.

Ví dụ 8

Tìm tập nghiệm của bất phương trình: $\left(\sqrt{2}-1\right)^x + \left(\sqrt{2}+1\right)^x - 2\sqrt{2} \le 0$.

(A) $(-\infty;-1] \cup [1;+\infty)$. (B) $(-1;1)$.
(C) $[-1;1]$. (D) $(-\infty;-1) \cup [1;+\infty)$.

Ví dụ 9

Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\left(\sqrt{3}+1\right)^x + \left(\sqrt{3}-1\right)^x \le \sqrt{2}^x$.

(A) $S = \mathbb{R}$. (B) $S = (0;+\infty)$. (C) $S = (-\infty;0]$. (D) $S = \varnothing$.

Dạng 3 Giải bất phương trình logarit cơ bản, phương pháp đưa về cùng cơ số

$\log_a u > b$

$a > 1$	$0 < a < 1$
Điều kiện: $u > 0$ Khi đó: $\log_a u > b \Rightarrow u > a^b$	Điều kiện: $u > 0$ Khi đó: $\log_a u > b \Rightarrow u < a^b$

$\log_a u \geq b$

$a > 1$	$0 < a < 1$
Điều kiện: $u > 0$ Khi đó: $\log_a u \geq b \Rightarrow u \geq a^b$	Điều kiện: $u > 0$ Khi đó: $\log_a u \geq b \Rightarrow u \leq a^b$

$\log_a u < b$

$a > 1$	$0 < a < 1$
Điều kiện: $u > 0$ Khi đó: $\log_a u < b \Rightarrow u < a^b$	Điều kiện: $u > 0$ Khi đó: $\log_a u < b \Rightarrow u > a^b$

$\log_a u \leq b$

$a > 1$	$0 < a < 1$
Điều kiện: $u > 0$ Khi đó: $\log_a u \leq b \Rightarrow u \leq a^b$	Điều kiện: $u > 0$ Khi đó: $\log_a u \leq b \Rightarrow u \geq a^b$

Ví dụ 1

Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(3x-1) > 3$.

(A) $S = (-\infty; 3)$. (B) $S = \left(-\infty; \frac{10}{3}\right)$. (C) $S = \left(\frac{10}{3}; +\infty\right)$. (D) $S = (3; +\infty)$.

Ví dụ 2

Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x+2) > 0$.

(A) $[-2; 0)$. (B) $(-1; +\infty)$. (C) $(-2; -1)$. (D) $(-\infty; -1)$.

Ví dụ 3

Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(3x-2) \leq 3$.

(A) $\left[\frac{10}{3};+\infty\right)$. (B) $\left[\frac{2}{3};\frac{10}{3}\right]$. (C) $\left(-\infty;\frac{10}{3}\right]$. (D) $\left(\frac{2}{3};\frac{10}{3}\right]$.

Ví dụ 4

Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y=\sqrt{1+\log_{0,8}(x-2)}$.

(A) $\mathscr{D}=\left(\frac{13}{4};+\infty\right)$. (B) $\mathscr{D}=\left[\frac{13}{4};+\infty\right)$. (C) $\mathscr{D}=\left[2;\frac{13}{4}\right]$. (D) $\mathscr{D}=\left(2;\frac{13}{4}\right]$.

$\log_a f(x)>\log_a g(x)$.

$a>1$	$0<a<1$
$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \\ f(x)>g(x) \end{cases}$	$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \\ f(x)<g(x) \end{cases}$

Ví dụ 5

Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_3 x>\log_3(2x-1)$.

(A) $S=\left[\frac{1}{2};1\right)$. (B) $S=(-\infty;1)$. (C) $S=\left(\frac{1}{2};1\right)$. (D) $S=(0;1)$.

Ví dụ 6

Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{5}}(3x-5)>\log_{\frac{1}{5}}(x+1)$ là

(A) $S=\left(\frac{5}{3};+\infty\right)$. (B) $S=(-\infty;3)$. (C) $S=\left(\frac{3}{5};3\right)$. (D) $S=\left(\frac{5}{3};3\right)$.

Ví dụ 7

Giải bất phương trình $\log_2(3x-2)>\log_2(6-5x)$ được tập nghiệm là $(a;b)$. Hãy tính tổng $S=a+b$.

(A) $S=\frac{26}{5}$. (B) $S=\frac{8}{3}$. (C) $S=\frac{28}{15}$. (D) $S=\frac{11}{5}$.

Dạng 4 Giải bất phương trình lôgarit bằng phương pháp đặt ẩn phụ

Ví dụ 1

(THPTQG 2017) Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2^2 x-5\log_2 x+4\geq 0$.

(A) $S=(-\infty;2]\cup[16;+\infty)$. (B) $S=[2;16]$.
(C) $S=(0;2]\cup[16;+\infty)$. (D) $S=(-\infty;1]\cup[4;+\infty)$.

Ví dụ 2

Bất phương trình $\log_2^2 x - \log_2(4x) < 0$ có số nghiệm nguyên là

(A) 3. (B) 2. (C) 1. (D) 0.

Ví dụ 3

Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{0,2}^2 x - \log_{0,2} x - 6 \leq 0$ có dạng $S = [a;b]$. Giá trị của $A = a \cdot b$ thuộc khoảng nào dưới đây?

(A) $\left(0;\frac{1}{2}\right)$. (B) $\left(\frac{3}{2};2\right)$. (C) $\left(\frac{1}{2};1\right)$. (D) $\left(1;\frac{3}{2}\right)$.

Ví dụ 4

Biết rằng tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\sqrt{3}} x\left(1+\frac{1}{3}\log_{\sqrt[3]{3}} 3x\right) \leq 6$ là $[a;b]$. Tính $T = 81a^2 + b^2$.

(A) $T = \frac{82}{9}$. (B) $T = \frac{84}{3}$. (C) $T = \frac{80}{9}$. (D) $T = \frac{80}{3}$.

Dạng 5 Bài toán lãi kép

Công thức $\boxed{X_n = X_0(1+d\%)^n}$

Trong đó

- X_0 là số tiền gửi ban đầu;
- X_n là số có được sau n kì hạn;
- $d\%$ là lãi suất mỗi kì hạn.

Ví dụ 1

Một người gửi ngân hàng 200 triệu đồng theo hình thức lãi kép, lãi suất 0,58% một tháng (kể từ tháng thứ hai trở đi, tiền lãi được tính theo phần trăm của tổng tiền gốc và tiền lãi tháng trước đó). Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng thì người đó có 225 triệu đồng?

(A) 30 tháng. (B) 21 tháng. (C) 24 tháng. (D) 22 tháng.

Ví dụ 2

Anh Nam muốn mua một ngôi nhà trị giá 500 triệu đồng sau 3 năm nữa. Biết rằng lãi suất hàng năm vẫn không đổi là 8% một năm. Vậy ngay từ bây giờ số tiền ít nhất anh Nam phải gửi tiết kiệm vào ngân hàng theo thể thức lãi kép để có đủ tiền mua nhà (kết quả làm tròn đến hàng triệu) là

(A) 397 triệu đồng. (B) 396 triệu đồng. (C) 395 triệu đồng. (D) 394 triệu đồng.

Ví dụ 3

Một người gửi 50 triệu đồng vào một ngân hàng theo thể thức lãi kép, với lãi suất 1,85%/quý. Sau tối thiểu bao nhiêu quý, người đó nhận được ít nhất 72 triệu đồng (cả vốn ban đầu và lãi),

nếu trong khoảng thời gian này người đó không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi?

(A) 20 quý. (B) 19 quý. (C) 14 quý. (D) 15 quý.

Ví dụ 4

Một người gửi ngân hàng số tiền 350.000.000 đồng (ba trăm năm mươi triệu đồng) với lãi suất tiền gửi là 0,6% mỗi tháng theo hình thức lãi kép. Cuối mỗi tháng người đó đều đặn gửi thêm vào ngân hàng số tiền 15.000.000 đồng (mười lăm triệu đồng). Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng thì số tiền người đó tích lũy được lớn hơn 650.000.000 đồng (sáu trăm năm mươi triệu đồng)?

(A) 18 tháng. (B) 17 tháng. (C) 16 tháng. (D) 19 tháng.

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BẢNG TÔ ĐÁP ÁN TỰ LUYỆN

Học sinh làm BTTL xong, tô phương án đúng. Buổi học sau, cùng với GV kiểm tra kết quả.

1	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	7	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	13	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	19	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	25	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
2	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	8	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	14	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	20	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	26	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
3	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	9	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	15	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	21	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	27	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
4	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	10	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	16	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	22	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	28	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
5	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	11	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	17	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	23	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	29	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
6	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	12	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	18	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	24	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	30	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

Câu 1

Giải bất phương trình $3^{x+2} \geq \dfrac{1}{9}$.

Ⓐ $x > 0$. Ⓑ $x < 0$. Ⓒ $x < 4$. Ⓓ $x \geq -4$.

Câu 2

Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-1} \geq \dfrac{1}{4}$.

Ⓐ $S = (-\infty; 3]$. Ⓑ $S = [3; +\infty)$. Ⓒ $S = (-\infty; 1]$. Ⓓ $S = [1; +\infty)$.

Câu 3

Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x} > 8$.

Ⓐ $S = (-3; +\infty)$. Ⓑ $S = (-\infty; 3)$. Ⓒ $S = (-\infty; -3)$. Ⓓ $S = (3; +\infty)$.

Câu 4

Tập nghiệm của bất phương trình $2^{2x} < 2^{x+6}$ là

Ⓐ $(0; 6)$. Ⓑ $(-\infty; 6)$. Ⓒ $(0; 64)$. Ⓓ $(6; +\infty)$.

Câu 5

Bất phương trình $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2+4x} > \dfrac{1}{32}$ có tập nghiệm là $S = (a; b)$. Khi đó giá trị $b - a$ là

Ⓐ 4. Ⓑ 2. Ⓒ 6. Ⓓ 8.

Câu 6

Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\left(\sqrt{2}\right)^{x^2-2x} \leqslant \left(\sqrt{2}\right)^{3}$ là

Ⓐ 3. Ⓑ 2. Ⓒ 5. Ⓓ 4.

Câu 7

Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{0,3}(3x-2) \geq 0$ là

(A) $\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$. (B) $\left(\frac{2}{3};1\right)$. (C) $\left(\frac{2}{3};,1\right]$. (D) $(2;+\infty)$.

Câu 8

Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{0,5}(x-3) < \log_{0,5}\left(x^2-4x+3\right)$ là

(A) $(3;+\infty)$. (B) $\mathbb{R}$. (C) $\varnothing$. (D) $(2;3)$.

Câu 9

Tập nghiệm của bất phương trình $\log(2x-1) \leq \log x$ là

(A) $\left[\frac{1}{2};1\right]$. (B) $(-\infty;1]$. (C) $\left(\frac{1}{2};1\right]$. (D) $(0;1]$.

Câu 10

Tập nghiệm của bất phương trình $\log(2x-1) \leq \log x$ là

(A) $\left[\frac{1}{2};1\right]$. (B) $(-\infty;1]$. (C) $\left(\frac{1}{2};1\right]$. (D) $(0;1]$.

Câu 11

Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x+7) > 0$ là

(A) $S=(-\infty;2)$. (B) $S=(2;3)$.
(C) $S=(3;+\infty)$. (D) $S=(-\infty;2)\cup(3;+\infty)$.

Câu 12

Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2\left(1+\log_{\frac{1}{9}} x-\log_9 x\right) < 1$ có dạng $S=\left(\frac{1}{a};b\right)$ với a,b là những số nguyên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $a=-b$. (B) $a+b=1$. (C) $a=b$. (D) $a=2b$.

Câu 13

Có tất cả bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left[\log_2\left(2-x^2\right)\right] > 0$?

(A) Vô số. (B) 1. (C) 0. (D) 2.

Câu 14

Tìm tất cả giá trị của tham số m để bất phương trình $3^x+1 \geq m$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

(A) $m<0$. (B) $m \leq 1$. (C) $m \leq 0$. (D) $m>1$.

Câu 15

Tìm tất cả giá trị của tham số m để bất phương trình $3^{\cos^2 x} \geq m$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

(A) $m < 0$. (B) $m \leq 0$. (C) $m > 1$. (D) $m \leq 1$.

Câu 16

Tập nghiệm của bất phương trình $16^x - 5.4^x + 4 \geq 0$ là

(A) $T = (-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$. (B) $T = (-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$.

(C) $T = (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$. (D) $T = (-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$.

Câu 17

Giải bất phương trình $(10 + 3\sqrt{11})^x + (10 - 3\sqrt{11})^x \leq 20$.

(A) $0 \leq x \leq 1$. (B) $-1 \leq x < 1$. (C) $-1 < x \leq 1$. (D) $-1 \leq x \leq 1$.

Câu 18

Biết rằng bất phương trình $\log_2(5^x + 2) + 2\log_{5^x+2} 2 > 3$ có tập nghiệm là $S = (\log_a b; +\infty)$, với a, b là các số nguyên dương nhỏ hơn 6 và $a \neq 1$. Tính $P = 2a + 3b$.

(A) $P = 16$. (B) $P = 7$. (C) $P = 11$. (D) $P = 18$.

Câu 19

Bất phương trình $2^{x+2} + 8 \cdot 2^{-x} - 33 < 0$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

(A) 4. (B) 6. (C) 7. (D) Vô số.

Câu 20

Giải bất phương trình $\sqrt{4 - 2^x} \cdot \log_2(x + 1) \geq 0$.

(A) $x \geq 0$. (B) $-1 < x \leq 2$. (C) $0 \leq x \leq 2$. (D) $-1 \leq x \leq 2$.

Câu 21

Số nghiệm nguyên của bất phương trình $3^x + 9 \cdot 3^{-x} < 10$ là

(A) Vô số. (B) 2. (C) 0. (D) 1.

Câu 22

Giải bất phương trình $64 \cdot 9^x - 84 \cdot 12^x + 27 \cdot 16^x < 0$.

(A) $\frac{9}{16} < x < \frac{3}{4}$. (B) $x < 1 \vee x > 2$. (C) $1 < x < 2$. (D) Vô nghiệm.

Câu 23

Tập nghiệm của bất phương trình $\log^2_{0,2} x - \log_{0,2} x - 6 \leq 0$ có dạng $S = [a; b]$. Giá trị của $A = a \cdot b$ thuộc khoảng nào dưới đây?

(A) $\left(0;\frac{1}{2}\right)$. (B) $\left(\frac{3}{2};2\right)$. (C) $\left(\frac{1}{2};1\right)$. (D) $\left(1;\frac{3}{2}\right)$.

Câu 24

Biết tập nghiệm S của bất phương trình $\log\left(-x^2+100x-2400\right)<2$ có dạng $S=(a;b)\setminus\{x_0\}$. Giá trị của $a+b-x_0$ bằng

(A) 150. (B) 100. (C) 30. (D) 50.

Câu 25

Bất phương trình $\log_2^2 x-\log_2(4x)<0$ có số nghiệm nguyên là

(A) 3. (B) 2. (C) 1. (D) 0.

Câu 26

Cho $f(x)=\frac{1}{2}\cdot 5^{2x+1}; g(x)=5^x+4x\cdot\ln 5$. Tập nghiệm của bất phương trình $f'(x)>g'(x)$ là

(A) $x<0$. (B) $x>1$. (C) $0<x<1$. (D) $x>0$.

Câu 27

Một người sử dụng xe máy có giá trị ban đầu là 40 triệu đồng. Sau mỗi năm, giá trị xe giảm 10% so với năm trước đó. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm thì giá trị xe nhỏ hơn 12 triệu đồng?

(A) 9. (B) 10. (C) 11. (D) 12.

Câu 28

Ông A gửi vào ngân hàng 300 triệu đồng theo thể thức lãi kép với lãi suất 10%/năm. Trong quá trình gửi lãi suất không đổi và ông A không rút tiền ra. Hỏi sau ít nhất mấy năm thì ông A rút được số tiền cả vốn và lãi đủ 500 triệu đồng?

(A) 4 năm. (B) 3 năm. (C) 6 năm. (D) 5 năm.

Câu 29

Một người gửi ngân hàng số tiền 350.000.000 đồng (ba trăm năm mươi triệu đồng) với lãi suất tiền gửi là 0,6% mỗi tháng theo hình thức lãi kép. Cuối mỗi tháng người đó đều đặn gửi thêm vào ngân hàng số tiền 15.000.000 đồng (mười lăm triệu đồng). Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng thì số tiền người đó tích lũy được lớn hơn 650.000.000 đồng (sáu trăm năm mươi triệu đồng)?

(A) 18 tháng. (B) 17 tháng. (C) 16 tháng. (D) 19 tháng.

Câu 30

Một người gửi tiết kiệm với lãi suất 8,4% một năm và lãi hằng năm được nhập vào vốn. Hỏi sau bao nhiêu năm người đó thu được ít nhất số tiền gấp ba lần số tiền ban đầu?

(A) 9. (B) 14. (C) 13. (D) 12.

——HẾT——

§7. PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ, LOGARIT CÓ CHỨA THAM SỐ

A CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1 Phương trình có nghiệm đẹp – Định lý Viét

Ví dụ 1

Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $16^x - m \cdot 4^{x+1} + 5m^2 - 45 = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?

(A) 3. (B) 13. (C) 4. (D) 6.

Ví dụ 2

Giả sử phương trình $\log_2^2 x - (m+2)\log_2 x + 2m = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 6$. Giá trị của biểu thức $|x_1 - x_2|$ là

(A) 3. (B) 8. (C) 2. (D) 4.

Ví dụ 3

Gọi S là tập hợp tất cả giá trị của tham số m để phương trình $4^x - (2m+3)2^x + m^2 + 3m + 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$ thỏa $3x_1 + x_2 = 1$. Số phần tử của tập S là

(A) 3. (B) 2. (C) 1. (D) 0.

Ví dụ 4

Gọi m_0 là giá trị của tham số m để phương trình $4^x - m2^{x+1} + 2m = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn $x_1 + x_2 = 3$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $m_0 \in (-2;0)$. (B) $m_0 \in (3;5)$. (C) $m_0 \in (0;2)$. (D) $m_0 \in (5;7)$.

Ví dụ 5

Biết phương trình $8\log_2^2 \sqrt[3]{x} + 2(m-1)\log_{\frac{1}{4}} x - 2019 = 0$ có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1 x_2 = 4$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $m \in (1;2)$. (B) $m \in (2;5)$. (C) $m \in (0;1)$. (D) $m \in (4;7)$.

Ví dụ 6

Biết phương trình $\log_2^2 x + 2\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} x + m - \dfrac{3}{2} = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 = 520$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $m \in (3;5)$. (B) $m \in (-3;-1)$. (C) $m \in (-1;1)$. (D) $m \in (1;3)$.

Ví dụ 7

Tìm các giá thực của tham số m để phương trình $\log_3^2 x - 3\log_3 x + 2m - 7 = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1+3)(x_2+3) = 72$.

(A) $m = \dfrac{61}{2}$. (B) $m = 3$. (C) Không tồn tại. (D) $m = \dfrac{9}{2}$.

Ví dụ 8

Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\log_3(x+3) + m\log_{\sqrt{x+3}} 9 = 16$ có hai nghiệm thỏa mãn $-2 < x_1 < x_2$.

(A) 15. (B) 17. (C) 14. (D) 16.

Ví dụ 9

Tìm m để phương trình $9^{x^2} - 2\cdot 3^{x^2+1} + 3m - 1 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

(A) $m = 2$. (B) $2 < m < \dfrac{10}{3}$. (C) $m < 2$. (D) $m > 2$.

Ví dụ 10

Cho phương trình $\left(2\log_3^2 x - \log_3 x - 1\right)\sqrt{5^x - m} = 0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt?

(A) 123. (B) 125. (C) Vô số. (D) 124.

Ví dụ 11

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình

$$4^{1+x} + 4^{1-x} = (m+1)(2^{2+x} - 2^{2-x}) + 16 - 8m$$

có nghiệm trên $[0;1]$.

(A) 2. (B) 5. (C) 4. (D) 3.

Ví dụ 12

Cho hai số thực a, b lớn hơn 1 thỏa mãn $a + b = 2020$. Gọi m, n là hai nghiệm của phương trình $(\log_a x)(\log_b x) - 2\log_a x - 2 = 0$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $m.n + 4a$ bằng

(A) 8076. (B) 2028. (C) 1011. (D) 3622.

Dạng 2 Phương trình không có nghiệm đẹp – Phương pháp hàm số

Ví dụ 1

Gọi $(a;b)$ là các tập giá trị của tham số m để phương trình $2e^{2x} - 8e^x - m = 0$ có đúng hai nghiệm thuộc khoảng $(0;\ln 5)$. Tổng $a + b$.

(A) 2. (B) 4. (C) -6. (D) -14.

Ví dụ 2

Tìm tất cả các giá trị của m sao cho phương trình $4^{x+1}-2^{x+2}+m=0$ có hai nghiệm phân biệt.

(A) $m \geq 1$. (B) $0<m<1$. (C) $m \leq 0$. (D) $m<1$.

Ví dụ 3

Phương trình $\log_3^2 x+\sqrt{\log_3^2 x+1}-2m-1=0$ có nghiệm trên $\left(1;3^{\sqrt{3}}\right]$ khi

(A) $m \in [2;+\infty)$. (B) $m \in (-\infty;0)$. (C) $m \in [0;2]$. (D) $m \in (0;2]$.

Ví dụ 4

Cho phương trình $\left(\sqrt{5}+1\right)^x+2m\left(\sqrt{5}-1\right)^x=2^x$. Tìm m để phương trình có một nghiệm duy nhất.

(A) $m<0$. (B) $m \leqslant 0, m=\dfrac{1}{8}$. (C) $0<m \leqslant \dfrac{1}{8}$. (D) $m<0, m=\dfrac{1}{8}$.

Ví dụ 5

Phương trình $2^{\sin^2 x}+2^{\cos^2 x}=m$ có nghiệm khi và chỉ khi

(A) $1 \leq m \leq \sqrt{2}$. (B) $\sqrt{2} \leq m \leq 2\sqrt{2}$. (C) $2\sqrt{2} \leq m \leq 3$. (D) $3 \leq m \leq 4$.

Ví dụ 6

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $4^x+2^x+4=3^m(2^x+1)$ có hai nghiệm phân biệt.

(A) $\log_4 3<m<1$. (B) $1<m<\log_3 4$. (C) $\log_4 3 \leq m<1$. (D) $1<m \leq \log_3 4$.

Ví dụ 7

Cho phương trình $2^{x^3+x^2-2x+m}-2^{x^2+x}+x^3-3x+m=0$. Tập các giá trị m để phương trình có 3 nghiệm phân biệt có dạng $(a;b)$. Tổng $a+2b$ bằng

(A) 1. (B) -2. (C) 0. (D) 2.

Ví dụ 8

Cho các số thực x, y thỏa mãn $5+16\cdot 4^{x^2-2y}=\left(5+16^{x^2-2y}\right)\cdot 7^{2y-x^2+2}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{10x+6y+26}{2x+2y+5}$. Tính $T=M+m$.

(A) $T=10$. (B) $T=\dfrac{21}{2}$. (C) $T=\dfrac{19}{2}$. (D) $T=15$.

Dạng 3 Bất phương trình – Phương pháp hàm số

Ví dụ 1

Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương nhỏ hơn 10 của tham số m để bất phương trình $m \cdot 9^x + (m-1)3^{x+2} + m - 1 > 0$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$?

(A) 3. (B) 9. (C) 8. (D) 2.

Ví dụ 2

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $(3m+1)12^x + (2-m)6^x + 3^x \leqslant 0$ có nghiệm đúng với $\forall x > 0$.

(A) $m < -2$. (B) $m > -2$. (C) $m \leqslant -2$. (D) $m \geqslant -2$.

Ví dụ 3

Cho bất phương trình $m \cdot 9^{2x^2-x} - (2m+1)6^{2x^2-x} + m \cdot 4^{2x^2-x} \leqslant 0$. Tìm m để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \geqslant \dfrac{1}{2}$.

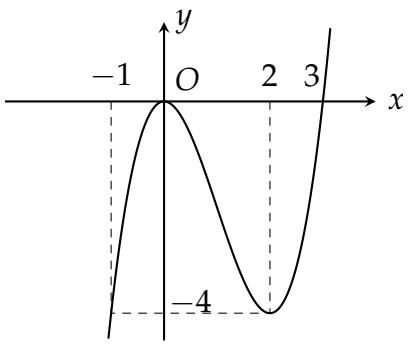
(A) $m < \dfrac{3}{2}$. (B) $m \leqslant \dfrac{3}{2}$. (C) $m \leqslant 0$. (D) $m < 0$.

Ví dụ 4

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên biết $f(2) = -4$, $f(3) = 0$. Bất phương trình $f\left(\mathrm{e}^x\right) < m\left(3\mathrm{e}^x + 2019\right)$ có nghiệm $x \in (\ln 2; 1)$ khi và chỉ khi

(A) $m > -\dfrac{4}{1011}$. (B) $m > -\dfrac{4}{2025}$.

(C) $m \geq \dfrac{4}{3\mathrm{e} + 2019}$. (D) $m > \dfrac{f(\mathrm{e})}{3\mathrm{e} + 2019}$.



Ví dụ 5

Tập hợp các giá trị của m để bất phương trình $\sqrt{2^x + 2} + \sqrt{6 - 2^x} \geq m$ có nghiệm là

(A) $2\sqrt{2} \leq m \leq 4$. (B) $0 \leq m \leq 2\sqrt{2}$. (C) $m \geq 4$. (D) $m \leq 4$.

B BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BẢNG TÔ ĐÁP ÁN TỰ LUYỆN

Học sinh làm BTTL xong, tô phương án đúng. Buổi học sau, cùng với GV kiểm tra kết quả.

1	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	7	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	13	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	19	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	25	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
2	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	8	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	14	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	20	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	26	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
3	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	9	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	15	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	21	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	27	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
4	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	10	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	16	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	22	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	28	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
5	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	11	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	17	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	23	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	29	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
6	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	12	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	18	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	24	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	30	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

Câu 1

Phương trình $4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + m = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = -1$. Giá trị của m thuộc khoảng nào sau đây?

Ⓐ $(-5;0)$. Ⓑ $(-7;-5)$. Ⓒ $(0;1)$. Ⓓ $(5;7)$.

Câu 2

Biết phương trình $\log_3^2 x - (m+2)\log_3 x + 3m - 1 = 0$ với m là tham số thực, có hai nghiệm là x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 x_2 = 27$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ $m \in (-2;-1)$. Ⓑ $m \in (0;2)$. Ⓒ $m \in (-1;0)$. Ⓓ $m \in (2;4)$.

Câu 3

Phương trình $9^x - 3m \cdot 3^x + 3m = 0$ có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m > \dfrac{a}{b}$ (với a, $b \in \mathbb{Z}_+$; $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản). Giá trị của biểu thức $b - a$ bằng

Ⓐ -2. Ⓑ -1. Ⓒ 1. Ⓓ 2.

Câu 4

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $2^x + (2-m)4^x - 8^x = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$?

Ⓐ 3. Ⓑ 2. Ⓒ 0. Ⓓ 1.

Câu 5

Giá trị thực của tham số m để phương trình $4^x - (2m+3)2^x + 64 = 0$ có hai nghiệm thực thỏa mãn $(x_1+2)(x_2+2) = 24$ thuộc khoảng nào sau đây?

Ⓐ $\left(0;\dfrac{3}{2}\right)$. Ⓑ $\left(-\dfrac{3}{2};0\right)$. Ⓒ $\left(\dfrac{21}{2};\dfrac{29}{2}\right)$. Ⓓ $\left(\dfrac{11}{2};\dfrac{19}{2}\right)$.

Câu 6

Số giá trị nguyên của m để phương trình $(m+1)\cdot 16^x - 2(2m-3)\cdot 4^x + 6m + 5 = 0$ có hai nghiệm trái dấu là

(A) 2. (B) 0. (C) 1. (D) 3.

Câu 7

Tìm m để phương trình $4^x - 2m\cdot 2^x + 4m + 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt?

(A) $m > -\dfrac{5}{4}$. (B) $m > 5$. (C) $\left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 5 \end{array}\right.$. (D) $m > 0$.

Câu 8

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số k để phương trình $\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 2k - 1 = 0$ có nghiệm thuộc $\left[1; 3^{\sqrt{3}}\right]$?

(A) 0. (B) 4. (C) 3. (D) 7.

Câu 9

Có bao nhiêu số nguyên dương m nhỏ hơn 2018 để phương trình $3^{|x|+1} + x^2 - m = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt?

(A) 2017. (B) 2014. (C) 2015. (D) 2016.

Câu 10

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $4^x + 2^x + 4 = 3^m(2^x + 1)$ có hai nghiệm phân biệt.

(A) $\log_4 3 < m < 1$. (B) $1 < m < \log_3 4$. (C) $\log_4 3 \le m < 1$. (D) $1 < m \le \log_3 4$.

Câu 11

Biết x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ là hai nghiệm của phương trình $\log_3\left(\sqrt{x^2 - 3x + 2} + 2\right) + 5^{x^2-3x+1} = 2$ và $x_1 + 2x_2 = \dfrac{1}{2}\left(a + \sqrt{b}\right)$ với a, b là hai số nguyên dương. Tính $a + b$.

(A) $a + b = 13$. (B) $a + b = 14$. (C) $a + b = 11$. (D) $a + b = 17$.

Câu 12

Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $1 \le x \le 2020$ và $x + x^2 - 9^y = 3^y$

(A) 2020. (B) 1010. (C) 6. (D) 7.

Câu 13

Có bao nhiêu số nguyên dương x thỏa mãn $2.2^x + x + \sin^2 x = 2^{\cos^2 x}$

(A) 4. (B) 3. (C) 1. (D) 0.

Câu 14

Cho phương trình $5^x + m = \log_5(x - m)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-20; 20)$ để phương trình đã cho có nghiệm?

(A) 20. (B) 21. (C) 9. (D) 19.

Câu 15

Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số $m \in (-10; 10)$ để phương trình $2^{x^2+2x+3} - 2^{m^2x^2+1} = (1 - m^2)x^2 + 2x + 2$ có hai nghiệm phân biệt. Số phần tử của S là

(A) 15. (B) 17. (C) 18. (D) 16.

Câu 16

Có bao nhiêu giá trị của tham số $m \in (0; 2018)$ để phương trình $\log_2\left(m + \sqrt{m + 2^x}\right) = 2x$ có nghiệm thực?

(A) 2017. (B) 2018. (C) 2016. (D) 2015.

Câu 17

Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2^{\sin^2 x} + 3^{\cos^2 x} = m \cdot 3^{\sin^2 x}$ có nghiệm?

(A) 7. (B) 4. (C) 5. (D) 6.

Câu 18

Có bao nhiêu giá trị m nguyên dương, nhỏ hơn 10 để bất phương trình $7^{\sin^2 x} + 3^{\cos^2 x} \leq m \cdot 4^{\cos^2 x}$ có nghiệm?

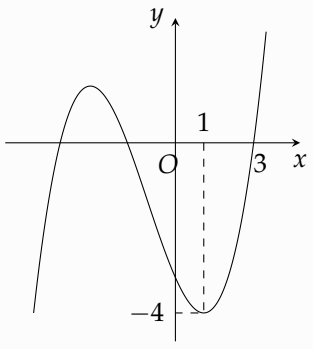
(A) 11. (B) 9. (C) 10. (D) 2.

Câu 19

Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình bên. Bất phương trình $f(e^x) < m(3e^x + 2019)$ có nghiệm $x \in (0; 1)$ khi và chỉ khi

(A) $m > -\dfrac{4}{1011}$. (B) $m \geq -\dfrac{4}{3e + 2019}$.

(C) $m \geq -\dfrac{2}{1011}$. (D) $m \geq \dfrac{f(e)}{3e + 2019}$.



Câu 20

Cho hàm số $f(x) = 2020^x - 2020^{-x}$. Gọi m_0 là số nguyên lớn nhất trong số nguyên m thỏa mãn $f(m + 1) + f\left(\dfrac{m}{2020} - 2020\right) < 0$. Tìm m_0.

(A) $m_0 = 2018$. (B) $m_0 = 2019$. (C) $m_0 = 2020$. (D) $m_0 = 2021$.

Câu 21

Hỏi có bao nhiêu giá trị m nguyên trong $[-2017;2017]$ để phương trình $\log(mx) = 2\log(x+1)$ có nghiệm duy nhất?

(A) 2017. (B) 4014. (C) 2018. (D) 4015.

Câu 22

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1;2\}$ và có bảng biến thiên như như sau

x	$-\infty$		1		$\sqrt{2}$		2		$+\infty$
y'		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
y	-1	↗	$+\infty$	$-\infty$	↗	4	↘	$+\infty$	↘ -1

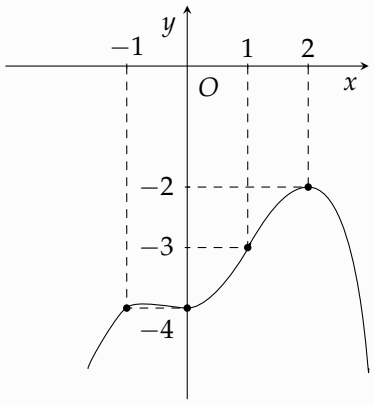
Phương trình $f(2^{\sin x}) = 3$ có bao nhiêu nghiệm trên đoạn $\left[0;\dfrac{5\pi}{6}\right]$?

(A) 3. (B) 2. (C) 4. (D) 5.

Câu 23

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Bất phương trình $f(x) \le 3^x - 2x + m$ có nghiệm trên $(-\infty;1]$ khi và chỉ khi

(A) $m \ge f(1) - 1$. (B) $m > f(1) + 1$.
(C) $m \le f(1) - 1$. (D) $m < f(1) - 1$.



Câu 24

Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình sau có nghiệm thực

$$\ln\left(\frac{\sin^3 x + 4}{-3\sin x + 4 + m}\right) + \sin^3 x + 3\sin x - m = 0.$$

(A) 4. (B) 3. (C) 5. (D) 6.

Câu 25

Cho phương trình $9^{x^2+m} - 3^{(x+2)^2} = -x^2 + 4x + 4 - 2m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m nằm trong khoảng $(-2018;2018)$ để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt?

(A) 2021. (B) 2022. (C) 2020. (D) 2019.

Câu 26

Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của m để phương trình $\log_2(2x+m)=\log_{\sqrt{2}}(x-1)$ có nghiệm duy nhất?

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Câu 27

Cho phương trình $2^{x^3+x^2-2x+m}-2^{x^2+x}+x^3-3x+m=0$. Tập các giá trị m để phương trình có 3 nghiệm phân biệt có dạng $(a;b)$. Tổng $a+2b$ bằng

(A) 1. (B) 0. (C) -2. (D) 2.

Câu 28

Cho $0\le x\le 2020$ và $\log_2(2x+2)+x-3y=8^y$. Có bao nhiêu cặp số $(x;y)$ nguyên thỏa mãn các điều kiện trên?

(A) 2019. (B) 2018. (C) 1. (D) 4.

Câu 29

Cho $\begin{cases}x,y\in\mathbb{R}\\ x,y\ge 1\end{cases}$ sao cho $\ln\left(2+\dfrac{x}{y}\right)+x^3-\ln 3=19y^3-6xy\left(x+2y\right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất m của biểu thức $T=x+\dfrac{1}{x+3y}$.

(A) $m=1+\sqrt{3}$. (B) $m=2$. (C) $m=\dfrac{5}{4}$. (D) $m=1$.

Câu 30

Cho x,y là các số thực thỏa mãn $\log_2\dfrac{y}{2\sqrt{1+x}}=3(y-\sqrt{1+x})-y^2+x$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $K=x-y$.

(A) $\min K=-\dfrac{3}{4}$. (B) $\min K=-\dfrac{5}{4}$. (C) $\min K=-2$. (D) $\min K=-1$.

——HẾT——

§8. ĐỀ TỔNG ÔN

A ĐỀ SỐ 1

Câu 1

Rút gọn biểu thức $Q = \dfrac{b^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[5]{b}}$ với $b > 0$.

(A) $Q = b^{\frac{1}{15}}$. (B) $Q = b^{-\frac{2}{15}}$. (C) $Q = b^{\frac{2}{15}}$. (D) $Q = b^{\frac{5}{3}}$.

Câu 2

Biến đổi $\sqrt[3]{x^5.\sqrt[4]{x}}, (x > 0)$ thành dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ ta được

(A) $x^{\frac{20}{3}}$. (B) $x^{\frac{23}{12}}$. (C) $x^{\frac{21}{12}}$. (D) $x^{\frac{12}{5}}$.

Câu 3

Cho số thực a thỏa $a^3 > a^{\pi}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $0 < a < 1$. (B) $a < 0$. (C) $a > 1$. (D) $a = 1$.

Câu 4

Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = (x^2 - 3x + 2)^{2016}$.

(A) $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$. (B) $\mathscr{D} = (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.
(C) $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. (D) $\mathscr{D} = (1; 2)$.

Câu 5

Hàm số $f(x) = (3 - x)^{\frac{7}{2}}$ có tập xác định là

(A) $D = (-\infty; 3)$. (B) $D = (0; +\infty)$. (C) $D = (-\infty; 0)$. (D) $D = (3; +\infty)$.

Câu 6

Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = (x^2 + x - 2)^{-2}$.

(A) $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. (B) $\mathscr{D} = (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$.
(C) $\mathscr{D} = (-2; 1)$. (D) $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$.

Câu 7

Cho hàm số $y = x^{\sqrt{2}}$ xác định trên khoảng $(0; +\infty)$. Đạo hàm của hàm số đã cho là

(A) $y' = \sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1} \ln \sqrt{2}$. (B) $y' = x^{\sqrt{2}}$.
(C) $y' = x^{\sqrt{2}} \ln \sqrt{2}$. (D) $y' = \sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}$.

Câu 8

Với a, b là các số thực dương tùy ý và $a \neq 1$, đặt $P = \log_{a^2}(ab^6)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $P = 23\log_a(ab)$. (B) $P = 3\log_a(ab)$. (C) $P = \frac{1}{2} + 3\log_a b$. (D) $P = 2 + 3\log_a b$.

Câu 9

Cho $\log_c a = 2$ và $\log_c b = 4$. Tính $P = \log_a b^4$.

(A) $P = 8$. (B) $P = \frac{1}{32}$. (C) $P = \frac{1}{8}$. (D) $P = 32$.

Câu 10

Cho $\log_2 5 = a, \log_3 5 = b$. Tính $\log_6 5$ theo a, b.

(A) $\log_6 5 = \frac{1}{a+b}$. (B) $\log_6 5 = a^2 + b^2$. (C) $\log_6 5 = a + b$. (D) $\log_6 5 = \frac{ab}{a+b}$.

Câu 11

Cho $a > 0, a \neq 1$ và hai số thực dương b, c thỏa mãn $\log_a b = 3$ và $\log_a c = -2$. Tính giá trị của biểu thức $P = \log_a \frac{a^2\sqrt[3]{b}}{c^5}$.

(A) $P = 9$. (B) $P = -2$. (C) $P = -7$. (D) $P = 13$.

Câu 12

Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = \log_2 \frac{x+3}{x-2}$.

(A) $\mathscr{D} = (-\infty; -3] \cup (2; +\infty)$. (B) $\mathscr{D} = (2; +\infty)$.
(C) $\mathscr{D} = (-3; 2)$. (D) $\mathscr{D} = (-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$.

Câu 13

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = m - 1$ có nghiệm thực.

(A) $m > 1$. (B) $m \geq 1$. (C) $m < 1$. (D) $m \neq 1$.

Câu 14

Cho hàm số $y = \ln x$. Tính đạo hàm của hàm số trên khoảng $(0; +\infty)$.

(A) $y' = x$. (B) $y' = \frac{1}{x}$. (C) $y' = -\frac{1}{x}$. (D) $y' = \frac{1}{x \ln 10}$.

Câu 15

Tính đạo hàm của hàm số $y = 3^{1-2x}$.

(A) $y' = 3^{1-2x} \ln 3$. (B) $y' = (1-2x)3^{-2x}$.
(C) $y' = -2.3^{1-2x} \ln 3$. (D) -2.3^{1-2x}.

Câu 16

Anh Việt muốn mua một ngôi nhà trị giá 500 triệu đồng sau 3 năm nữa. Vậy ngay từ bây giờ Việt phải gửi tiết kiệm vào ngân hàng theo thể thức lãi kép là bao nhiêu tiền để có đủ tiền mua nhà, biết rằng lãi suất hàng năm vẫn không đổi là 8% một năm và lãi suất được tính theo kỳ hạn một năm? (kết quả làm tròn đến hàng triệu)

(A) 397 triệu đồng. (B) 396 triệu đồng. (C) 395 triệu đồng. (D) 394 triệu đồng.

Câu 17

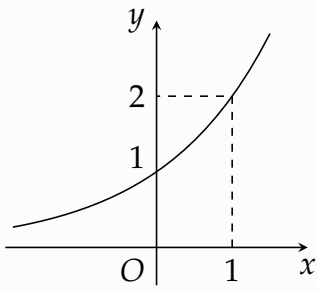
Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = \log_3(3 - x)$.

(A) $\mathscr{D} = (3; +\infty)$. (B) $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$. (C) $\mathscr{D} = (-\infty; 3)$. (D) $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Câu 18

Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào có đồ thị là đường cong được cho trong hình vẽ?

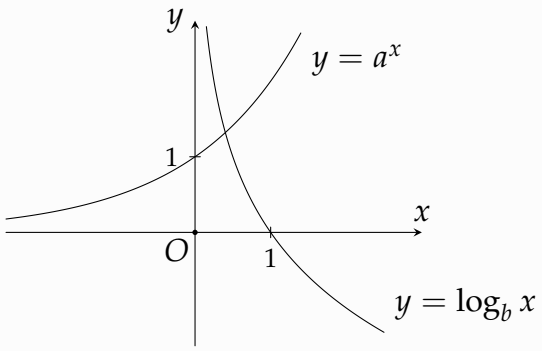
(A) $y = \log_2(x + 3)$. (B) $y = \log_3 x$.
(C) $y = 2^x$. (D) $y = 2^{-x}$.



Câu 19

Cho $a > 0, b > 0, a \neq 1, b \neq 1$. Đồ thị hàm số $y = a^x$ và $y = \log_b x$ được cho như hình vẽ bên. Trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào đúng?

(A) $a > 1, 0 < b < 1$.
(B) $0 < a < 1, b > 1$.
(C) $0 < a < 1, 0 < b < 1$.
(D) $a > 1, b > 1$.



Câu 20

Giải phương trình $2^x = 3$

(A) $x = 2^{\sqrt{3}}$. (B) $x = \log_2 3$. (C) $x = \log_3 2$. (D) $x = 3^{\sqrt{2}}$.

Câu 21

Tìm nghiệm của phương trình $\log_2 2018x = 3$.

(A) $x = 3 + \log_2 2018$. (B) $x = \dfrac{4}{1009}$. (C) $x = 3 - \log_2 2018$. (D) $x = \dfrac{3^2}{2018}$.

Câu 22

Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2(x^2-8)=0$ bằng

(A) 3. (B) -6. (C) 0. (D) 6.

Câu 23

Cho phương trình $5^{x^2-3}=\dfrac{1}{25^x}$. Khi đó, tổng các nghiệm của phương trình có giá trị là

(A) 4. (B) -4. (C) 2. (D) -2.

Câu 24

Cho x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $5^{x-1}+5^{3-x}=26$. Khi đó tổng x_1+x_2 có giá trị bằng

(A) 5. (B) 1. (C) 4. (D) 3.

Câu 25

Phương trình $\log_2^2 x+3\log_{\frac{1}{2}} x+2=0$ có tổng tất cả các nghiệm là

(A) 6. (B) 8. (C) 9. (D) 5.

Câu 26

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $\pi\log_7^2 x-10\log_7 x+\mathrm{e}=0$. Tính giá trị của biểu thức $P=\log_{\sqrt{7}} x_1\cdot\log_{\sqrt{7}} x_2$.

(A) $P=\dfrac{\mathrm{e}}{4\pi}$. (B) $P=\dfrac{2\mathrm{e}}{\pi}$. (C) $P=\dfrac{4\mathrm{e}}{\pi}$. (D) $P=\dfrac{\mathrm{e}}{\pi}$.

Câu 27

Giải phương trình $\mathrm{e}^{2x}=2\mathrm{e}^x+3$.

(A) $x=\ln 3$. (B) $\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\ln 3\end{array}\right.$. (C) $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{\mathrm{e}}\\x=\ln 3\end{array}\right.$. (D) $\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=3\end{array}\right.$.

Câu 28

Giải bất phương trình $\log_8(4-2x)\geq 2$.

(A) $x\leq 6$. (B) $x\leq -30$. (C) $x\geq 6$. (D) $x\geq -30$.

Câu 29

Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\left(\dfrac{1}{25}\right)^{2x-\frac{3}{2}}<5^{1-2x}$.

(A) $S=(-\infty;1)$. (B) $S=(-1;+\infty)$. (C) $S=(-\infty;-1)$. (D) $S=(1;+\infty)$.

Câu 30

Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $4\log_{0,04}^2 x - 5\log_{0,2} x < -6$.

(A) $S = \left(\frac{1}{25}; +\infty\right)$.
(B) $S = \left(-\infty; \frac{1}{125}\right) \cup \left(\frac{1}{25}; +\infty\right)$.
(C) $S = \left(\frac{1}{125}; \frac{1}{25}\right)$.
(D) $S = \left(-\infty; \frac{1}{125}\right)$.

Câu 31

Bất phương trình $\log_2(3x-2) > \log_2(6-5x)$ có tập nghiệm là

(A) $(0; +\infty)$.
(B) $\left(\frac{1}{2}; 3\right)$.
(C) $(-3; 1)$.
(D) $\left(1; \frac{6}{5}\right)$.

Câu 32

Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(2x) < \log_2(x+1)$.

(A) $(0; 1)$.
(B) $(0; +\infty)$.
(C) $(-1; 1)$.
(D) $(-\infty; 1)$.

Câu 33

Một khu rừng ban đầu có trữ lượng gỗ là $4 \cdot 10^5$ mét khối gỗ. Gọi tốc độ sinh trưởng mỗi năm của khu rừng đó là $a\%$. Biết sau 5 năm thì sản lượng gỗ là xấp xỉ $4{,}8666 \cdot 10^5$ mét khối. Giá trị của a xấp xỉ

(A) 3,5%.
(B) 4%.
(C) 4,5%.
(D) 5%.

Câu 34

Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 = 98ab$. Tính $P = \ln\left(\frac{a+b}{10}\right)$.

(A) $P = 2\ln(ab)$.
(B) $P = 2\ln(10ab)$.
(C) $P = \frac{1}{2}\ln(10ab)$.
(D) $P = \frac{1}{2}\ln(ab)$.

Câu 35

Cho hai số thực dương m, n thỏa mãn $\log_4\left(\frac{m}{2}\right) = \log_6 n = \log_9(m+n)$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{m}{n}$.

(A) $P = 2$.
(B) $P = 1$.
(C) $P = 4$.
(D) $P = \frac{1}{2}$.

Câu 36

Phương trình $2^{x^2+x} - 4 \cdot 2^{x^2-x} - 2^{2x} + 4 = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?

(A) 1.
(B) 3.
(C) 2.
(D) 4.

Câu 37

Biết x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ là hai nghiệm của phương trình $\log_3\left(\sqrt{x^2-3x+2}+2\right)+5^{x^2-3x+1}=2$ và $x_1+2x_2=\dfrac{1}{2}\left(a+\sqrt{b}\right)$ với a, b là hai số nguyên dương. Tính $a+b$.

(A) $a+b=13$. (B) $a+b=14$. (C) $a+b=11$. (D) $a+b=17$.

Câu 38

Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $2^{2x^2-15x+100}-2^{x^2+10x-50}+x^2-25x+150<0$.

(A) 6. (B) 4. (C) 5. (D) 3.

Câu 39

Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $16^x-m\cdot 4^{x+1}+5m^2-45=0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?

(A) 13. (B) 3. (C) 6. (D) 4.

Câu 40

Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $9^x+3^{x+1}-m=0$ có nghiệm thuộc $(0;1)$.

(A) 11. (B) 12. (C) 13. (D) 14.

——HẾT——

B ĐỀ SỐ 2

Câu 1

Cho a là một số thực dương. Viết $a^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{a}$ dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỷ.

(A) $a^{\frac{7}{3}}$. (B) $a^{\frac{7}{6}}$. (C) $a^{\frac{5}{3}}$. (D) $a^{\frac{1}{3}}$.

Câu 2

Rút gọn biểu thức $P = \left(2-\sqrt{3}\right)^{2017} \cdot \left(2+\sqrt{3}\right)^{2018}$.

(A) $P = 2-\sqrt{3}$. (B) $P = 1$. (C) $P = -2-\sqrt{3}$. (D) $P = 2+\sqrt{3}$.

Câu 3

Tập xác định của hàm số $y = (x+1)^{-2}$ là

(A) $[-1;+\infty)$. (B) $(-1;+\infty)$. (C) $\mathbb{R}$. (D) $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Câu 4

Hàm số $y = x^{\pi+1} + (x^2-1)^{2e}$ có tập xác định là

(A) $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$. (B) $(1;+\infty)$. (C) $(-1;1)$. (D) $\mathbb{R}$.

Câu 5

Tìm tập xác định của hàm số $y = \left(x^2-3x+2\right)^{\frac{1}{2}}$.

(A) $\mathscr{D} = (1;2)$. (B) $\mathscr{D} = [1;2]$.
(C) $\mathscr{D} = (-\infty;1]\cup[2:+\infty)$. (D) $\mathscr{D} = (-\infty;1)\cup(2:+\infty)$.

Câu 6

Cho a là số thực dương và khác 1. Tính $P = a^{\log_{\sqrt{a}} 5}$.

(A) $P = 5$. (B) $P = 25$. (C) $P = \sqrt{5}$. (D) $P = \dfrac{1}{5}$.

Câu 7

Với x là số thực dương tùy ý, mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?

(A) $\log_{100} x = \log x$. (B) $\log_{100} x = 2\log x$.
(C) $\log_{100} x = \dfrac{1}{2}\log x$. (D) $\log_{100} x = -\log x$.

Câu 8

Cho $a^{\frac{3}{4}} > a^{\frac{4}{5}}$, $\log_b \dfrac{1}{2} < \log_b \dfrac{2}{3}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $a > 1, 0 < b < 1$. (B) $a > 1, b > 1$.
(C) $0 < a < 1, 0 < b < 1$. (D) $0 < a < 1, b > 1$.

Câu 9

Cho $\log_2 x = \sqrt{2}$. Tính giá trị biểu thức $P = \log_2 x^2 + \log_{\frac{1}{2}} x^2 + \log_4 x$.

(A) $P = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. (B) $P = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$. (C) $P = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. (D) $P = -\dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

Câu 10

Đặt $\log_5 4 = a$, $\log_5 3 = b$. Hãy biểu diễn $\log_{25} 12$ theo a và b.

(A) $2ab$. (B) $\dfrac{a+b}{2}$. (C) $2(a+b)$. (D) $\dfrac{ab}{2}$.

Câu 11

Tính đạo hàm của hàm số $y = 2^{x^2+1}$.

(A) $y' = x \cdot 2^{x^2+1} \ln 2$. (B) $y' = 2^{x^2+1} \ln 2$.
(C) $y' = 2x \cdot 2^{x^2+1} \ln\left(x^2+1\right)$. (D) $y' = 2x \cdot 2^{x^2+1} \ln 2$.

Câu 12

Tập xác định của hàm số $y = \log_2(x^2 - 4x + 4)$.

(A) $(2; +\infty)$. (B) $[2; +\infty)$. (C) $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. (D) $\mathbb{R}$.

Câu 13

Cho hàm số $y = \ln(3x^2 - 2x - 1)$. Số nghiệm của phương trình $y' = 0$ là

(A) 0. (B) 1. (C) 3. (D) 2.

Câu 14

Bà A gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép (đến kỳ hạn mà người gửi không rút lãi ra thì tiền lãi được tính vào vốn của kỳ tiếp theo) với lãi suất 7%/năm. Hỏi sau 2 năm bà A thu được lãi là bao nhiêu? (Giả sử lãi suất không thay đổi).

(A) 20 triệu đồng. (B) 14,50 triệu đồng. (C) 14,49 triệu đồng. (D) 15 triệu đồng.

Câu 15

Phương trình $\log_3(3x - 2) = 3$ có nghiệm là

(A) $x = \dfrac{29}{3}$. (B) $x = \dfrac{11}{3}$. (C) $x = \dfrac{25}{3}$. (D) $x = 87$.

Câu 16

Số nghiệm của phương trình $16^x + 3 \cdot 4^x + 2 = 0$.

(A) 3. (B) 0. (C) 2. (D) 1.

Câu 17

Số nghiệm của phương trình $\log_3(x^2-6)=\log_3(x-2)+1$ là

(A) 2. (B) 0. (C) 1. (D) 3.

Câu 18

Tổng các nghiệm của phương trình $2^{x^2+3x-3}=2.4^{x+1}$ bằng

(A) -1. (B) 1. (C) 2. (D) -5.

Câu 19

Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x-9)>0$ là

(A) $[9;+\infty)$. (B) $(10;+\infty)$. (C) $[10;+\infty)$. (D) $(9;+\infty)$.

Câu 20

Số nghiệm **nguyên** của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-1\right)>-3$

(A) 2. (B) 3. (C) 4. (D) 5.

Câu 21

Tìm số nghiệm nguyên thoả mãn bất phương trình $2^{x^2-x}\leq 4$.

(A) 4. (B) 3. (C) 2. (D) 0.

Câu 22

Cho bất phương trình $12\cdot 9^x-35\cdot 6^x+18\cdot 4^x>0$. Nếu đặt $t=\left(\frac{2}{3}\right)^x$ với $t>0$ thì bất phương trình đã cho trở thành bất phương trình nào trong các bất phương trình dưới đây?

(A) $12t^2-35t+18>0$. (B) $18t^2-35t+12>0$.
(C) $12t^2-35t+18<0$. (D) $18t^2-35t+12<0$.

Câu 23

Bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(3x+1)>\log_{\frac{1}{2}}(x+7)$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

(A) 1 . (B) 2 . (C) 3 . (D) 0.

Câu 24

Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(x-1)>1-\log_3(x+1)$ là

(A) $(2;+\infty)$. (B) $(1;2)$.
(C) $(-2;-1)$. (D) $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$.

Câu 25

Tập nghiệm của bất phương trình $3 \cdot 9^x - 10 \cdot 3^x + 3 \leq 0$ là $T = [a; b]$. Khi đó $a - b$ bằng

(A) $\frac{5}{2}$. (B) -2. (C) 1. (D) $\frac{3}{2}$.

Câu 26

Tích các nghiệm của phương trình $\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 5 = 0$.

(A) -6. (B) -3. (C) 1. (D) $\sqrt{3}$.

Câu 27

Tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $2\log_4(x-3) + \log_4(x-6)^2 = 1$ là

(A) 9. (B) $\frac{27+\sqrt{17}}{2}$. (C) 18. (D) $\frac{18+\sqrt{17}}{2}$.

Câu 28

Tổng giá trị của tất cả các nghiệm của phương trình $\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_4 x} = 1$ bằng

(A) 24. (B) 18. (C) 9. (D) 12.

Câu 29

Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình: $\log_2\left(\frac{x^2+2x+2}{3x^2+x+2}\right) = x^2 - 3x - 3$. Tính giá trị của biểu thức $T = x_1^2 + x_2^2$.

(A) $T = \frac{25}{4}$. (B) $T = \frac{33}{4}$. (C) $T = 15$. (D) $T = 13$.

Câu 30

Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_{25}\frac{x}{2} = \log_{15} y = \log_9 \frac{x+y}{4}$ và $\frac{x}{y} = \frac{-a+\sqrt{b}}{2}$, với a, b là các số nguyên dương. Tính $a + b$.

(A) $a + b = 14$. (B) $a + b = 3$. (C) $a + b = 21$. (D) $a + b = 34$.

Câu 31

Tìm tập nghiệm của bất phương trình $9^x - 2(x+5)3^x + 9(2x+1) \geq 0$.

(A) $[0; 1] \cup [2; +\infty)$. (B) $(-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$.
(C) $[1; 2]$. (D) $(-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$.

Câu 32

Biết tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(\sqrt{x^2+x+2}+1) + 3\log_5(x^2+x+3) < 4$ là $(a; b)$. Khi đó tổng $2a + b$ bằng

(A) -3. (B) 2. (C) 3. (D) 0.

Câu 33

Giải bất phương trình $\log_3 \dfrac{5x+1}{(x-1)^2} \geq 3x^2 - 11x + 3$ ta được tập nghiệm S. Biết rằng S có dạng $[a;b]\backslash\{1\}$. Hãy tính $T = (a+b) - ab$.

(A) $\dfrac{23}{3}$. (B) $\dfrac{11}{3}$. (C) 3. (D) $\dfrac{10}{3}$.

Câu 34

Số nghiệm của phương trình $\log_2(x^3 - 2x^2 - 3x + 4) + \log_{\frac{1}{2}}(x-1) = 0$ là

(A) 0. (B) 3. (C) 2. (D) 1.

Câu 35

Biết rằng phương trình $\log_{\sqrt[3]{2}} x + \log_{\sqrt{\frac{1}{2}}}\left(1-\sqrt{x}\right) = \log_2\left(x - 2\sqrt{x} + 2\right) + 1$ có nghiệm $x = a + b\sqrt{c}$, với $a, c, b \in \mathbb{Z}$ và $c \leq 11$. Tính $a+b+c$.

(A) 5. (B) 7. (C) 3. (D) 9.

Câu 36

Tìm tất cả các giá trị của m sao cho phương trình $4^{x+1} - 2^{x+2} + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

(A) $m \geq 1$. (B) $0 < m < 1$. (C) $m \leq 0$. (D) $m < 1$.

Câu 37

Phương trình $2^{\sin^2 x} + 2^{1+\cos^2 x} = m$ có nghiệm khi và chỉ khi

(A) $4 \leq m \leq 3\sqrt{2}$. (B) $3\sqrt{2} \leq m \leq 5$. (C) $0 < m \leq 5$. (D) $4 \leq m \leq 5$.

Câu 38

Xét bất phương trình $\log_2^2 2x - 2(m+1)\log_2 x - 2 < 0$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình có nghiệm thuộc khoảng $\left(\sqrt{2}; +\infty\right)$.

(A) $m \in (-\infty; 0)$. (B) $m \in \left(-\dfrac{3}{4}; 0\right)$. (C) $m \in \left(-\dfrac{3}{4}; +\infty\right)$. (D) $m \in (0; +\infty)$.

Câu 39

Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $5^{\sin^2 x} + 6^{\cos^2 x} = 7^{\cos^2 x} \cdot \log_2 m$ có nghiệm?

(A) 63. (B) 64. (C) 65. (D) 66.

Câu 40

Xét các số nguyên dương a, b sao cho phương trình $a\ln^2 x + b\ln x + 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và phương trình $5\log^2 x + b\log x + a = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 thỏa mãn $x_1 x_2 > x_3 x_4$. Tìm giá trị nhỏ nhất $S_{\min}$ của $S = 2a + 3b$.

Ⓐ $S_{\min} = 25$. Ⓑ $S_{\min} = 30$. Ⓒ $S_{\min} = 33$. Ⓓ $S_{\min} = 17$.

——HẾT——